

# **CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO**

---

## **UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO**



### **CURSO DE FISICA**

#### **TEMA 17: Rotación de un Cuerpo Rígido Alrededor de un Eje Fijo Parte II.**

# CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

---

## Contenido

OBJETIVOS .....	3
Objetivos Generales.....	3
Objetivos Específicos.....	3
9.5 ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN E INERCIA ROTACIONAL. ....	4
9.6 MOMENTO DE TORSION Y ACELERACION ANGULAR EN LA ROTACION. SEGUNDA LEY DE NEWTON EN LA ROTACION. ....	5
9.7 MOMENTOS DE INERCIA DE ALGUNOS CUERPOS RÍGIDOS. ....	7
9.8 EJERCICIOS. ....	8

# CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

---

## OBJETIVOS

### Objetivos Generales

- 1) Explique el momento de torsión y su relación con la aceleración angular
- 2) Aplique las ecuaciones para calcular la inercia de rotación de un sistema de partículas.
- 3) Aplique la segunda ley de newton para la rotación en la solución de problemas.

### Objetivos Específicos

- 1) Explicará que se entiende por energía cinética de rotación e inercia rotacional.
- 2) Definirá el momento de inercia de un sistema de partículas y su relación con la rapidez angular para calcular la energía cinética de rotación.
- 3) Escribirá las expresiones matemáticas que definen la energía cinética de rotación e inercia rotacional.
- 4) Calculara la inercia rotacional de un sistema de partículas.
- 5) Explicará el momento de torsión de una fuerza.
- 6) Expresara matemáticamente el momento de torsión de una fuerza y de un sistema de fuerzas.
- 7) Resolverá problemas sobre momento de torsión.
- 8) Resolverá problemas que involucren el momento de torsión de una fuerza y la aceleración angular.

### 9.5 ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN E INERCIA ROTACIONAL.

Consideremos un cuerpo rígido formado por un gran número de partículas de masas  $m_1, m_2, m_3, \dots$  a distancias  $r_1, r_2, r_3, \dots$  respectivamente del eje de rotación Z que pasa por "O" tal como se muestra en la figura.

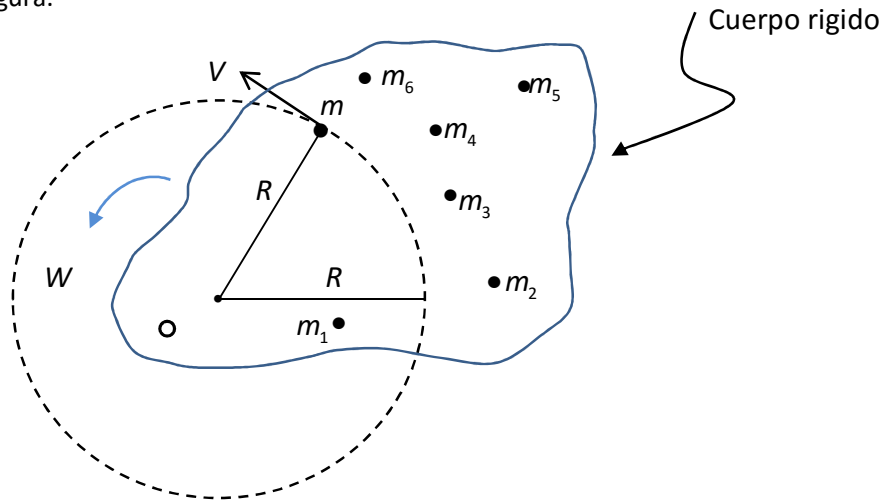


fig 1

El cuerpo rígido se considera un conjunto de partículas que giran todas con la misma velocidad angular  $W$ . Para la partícula de masa " $m$ " la rapidez lineal está dada por:

$$V_i = WR_i$$

La energía cinética de la partícula se obtiene por:

$$K_i = \frac{1}{2}m_i V_i^2 = \frac{1}{2}m_i (WR_i)^2 = \frac{1}{2}m_i W^2 R_i^2$$

La energía cinética total del cuerpo rígido será la suma de las energías cinéticas de cada partícula que forman el cuerpo rígido.

$$\text{Si } K_i = \frac{1}{2}(m_i R_i^2)W^2, \text{ luego } K = \sum K_i$$

$$K = \sum \frac{1}{2}(m_i R_i^2)W^2$$

$$K = \frac{1}{2}(\sum m_i R_i^2)W^2$$

## CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Se define  $\sum m_i R_i^2$  como el momento de inercia que se presenta por I. Se expresa en  $\text{Kgm}^2$  en el SI.

Luego  $I = \sum m_i R_i^2$ . Por lo tanto

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

El valor de I depende de la distribución espacial de la masa del cuerpo. La expresión anterior representa la energía cinética de rotación que en la traslación representamos por  $K = \frac{1}{2} m V^2$ . En ambas expresiones involucramos el término inercia, en la traslación “m” es una medida de ella y en la rotación es I.

### 9.6 MOMENTO DE TORSION Y ACELERACION ANGULAR EN LA ROTACION. SEGUNDA LEY DE NEWTON EN LA ROTACION.

Analizaremos la rotación de un cuerpo rígido similar al mostrado en la figura 1.

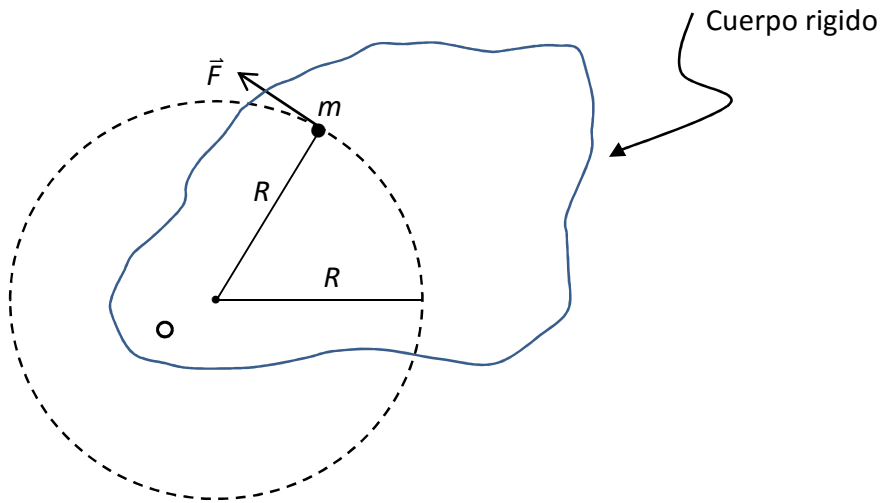


fig 2

## CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

---

La fuerza  $\vec{F}$  actúa sobre la pequeña masa “m” que forma parte del cuerpo rígido y se encuentra a una distancia “R” del eje de rotación Z que pasa por “O”.

La fuerza  $\vec{F}$  es perpendicular a R y esta aplicada tangencialmente por lo que el cuerpo gira con una aceleración tangencial

$$a_t = \alpha R$$

Donde  $\alpha$  es la aceleración angular. Por la segunda ley de Newton:

$$F = ma_t = m\alpha R$$

Multiplicando ambos miembros por R queda:

$$\begin{aligned} FR &= m\alpha R^2 \\ FR &= (mR^2)\alpha \end{aligned}$$

El producto FR se conoce como momento de torsión o torque producido por la fuerza  $\vec{F}$  con respecto al eje de rotación.

Luego  $\tau = (mR^2)\alpha$

Se puede deducir una ecuación similar para todas las demás partículas que forman parte del cuerpo rígido que gira. Respecto a la aceleración angular  $\alpha$ , esta será constante para cada partícula independientemente de su masa a de su distancia al eje. El momento de torsión resultante para el cuerpo rígido se expresa:

$$\begin{aligned} \tau &= (\sum mR^2)\alpha \\ \tau &= I\alpha \end{aligned}$$

Que se lee: momento de torsión = momento de inercia X aceleración angular. Esta expresión constituye la segunda ley de newton para la rotación. En forma similar la segunda ley de newton para la traslación se expresa como F=ma.

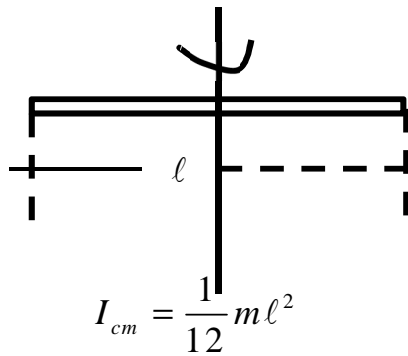
La segunda ley de newton para la rotación  $\tau = I\alpha$  expresa que:

“El momento de torsión resultante aplicado a un cuerpo rígido origina una aceleración angular tal que  $\vec{\tau} \propto \vec{\alpha}$ ”.

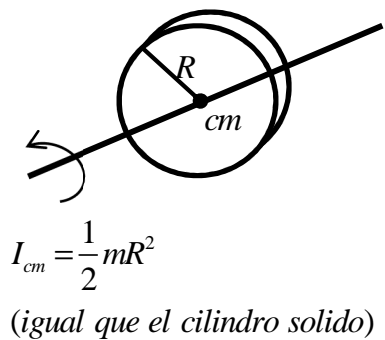
### 9.7 MOMENTOS DE INERCIA DE ALGUNOS CUERPOS RÍGIDOS.

Para cuerpos que tienen una distribución continua de masa, los cálculos del momento de inercia son más difíciles, requieren la aplicación de cálculo Integral. A continuación se presentan algunos casos junto con la expresión para calcular el momento de inercia cuando el eje de rotación pasa por el centro de masa (cm).

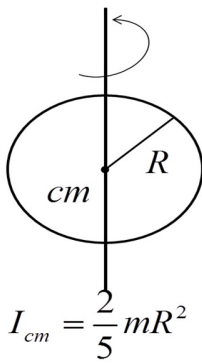
a) Barra delgada.



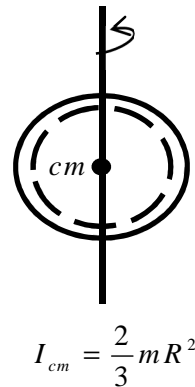
d) Disco Solido.



b) esfera sólida.

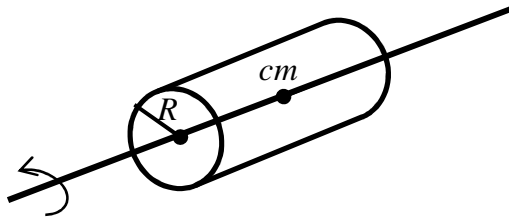


e) Esfera hueca de pared delgada.



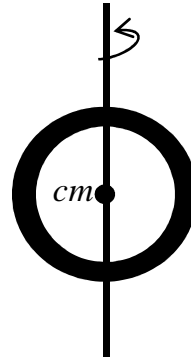
## CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

c) cilindro sólido



$$I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$$

f) Aro o anillo (Aro delgado)



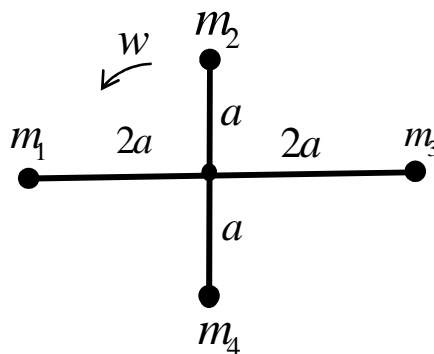
$$I_{cm} = mR^2$$

### 9.8 EJERCICIOS.

#### EJEMPLO 1.

Para el sistema mostrado en la figura y considerando que las masas de las varillas que unen las masas puntuales son despreciables. Calcular:

- El momento de inercia del sistema.
- Si el sistema rota con una velocidad angular de 3.0 rad/s, la energía cinética rotacional del sistema.





## CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Solución:

a) Sea "O" el centro de rotación

$$I = \sum mr^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2$$

$$\text{Si } m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$$

$$I = m(2a)^2 + m(a)^2 + m(2a)^2 + m(a)^2$$

$$I = m(4a^2) + m(a^2) + m(4a^2) + m(a^2)$$

$$I = m4a^2 + ma^2 + m4a^2 + ma^2$$

$$I = 10ma^2$$

$$\text{Suponiendo que } m = 1.0\text{kg}; a = 20\text{cm} = 0.20\text{m}$$

$$I = 10(1.0\text{kg})(0.20\text{m})^2$$

$$I = 10\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

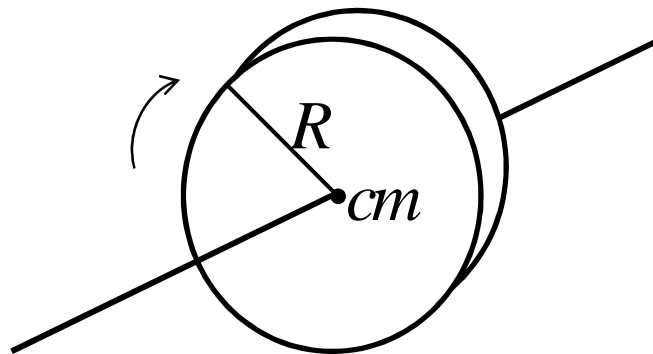
b)

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (10.0) (0)^2$$

$$K = 45.0\text{J}$$

### EJEMPLO 2

Un disco de esmeril de radio 70.0cm y 80 kg de masa gira a 400 Rev. /min. Si el disco se detiene en 25 s, calcular la fuerza de fricción que aplicada tangencialmente al borde lo lleve al reposo.



## CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Solución:

La inercia rotacional del disco se toma de la tabla anterior:

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

$$I = \frac{1}{2}(80\text{kg})(0.70\text{m})^2$$

$$I = 19.6\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$w_0 = 400\text{rpm} = 400 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{1\text{min}}{60\text{s}} \times \frac{2\pi\text{rad}}{1\text{rev}} = 41.9\text{rad/s}$$

Si en  $t = 25\text{s}$   $w = 0$ , la aceleración regular será:

$$w = w_0 + \alpha t$$

$$\alpha = \frac{w - w_0}{t} = \frac{(0 - 41.9)\text{rad/s}}{25\text{s}}$$

$$\alpha = -1.68\text{rad/s}^2$$

Por la segunda ley de Newton para la rotación

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$FR = I\alpha$$

$$F = \frac{I\alpha}{R}$$

$$F = \frac{(19.6\text{kg}\cdot\text{m}^2)(-1.68\text{rad/s}^2)}{0.70\text{m}}$$

$$F = -47.0\text{N}$$

### Ejemplo 3

Una cuerda se enrolla alrededor de un disco uniforme de 25 cm de radio y 8.0 kg de masa. El disco es libre de girar alrededor de su eje partiendo del reposo. El extremo de la cuerda se jala con una fuerza constante de 12N. Para  $t=2.0\text{s}$ , después de que la fuerza se aplica determine:

- El momento de torsión que la fuerza ejerce sobre el disco.
- La aceleración angular del disco.
- La aceleración extrema de la cuerda.
- La velocidad angular del disco.
- La velocidad del extremo de la cuerda.
- La energía cinética de rotación del disco.
- El ángulo girado por el disco.

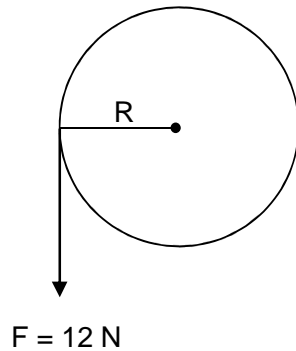
## CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Solución:

Datos:  $R = 0.25\text{m}$

$m = 8.0\text{kg}$

$W_0 = 0$



Para  $t = 2.0\text{ s}$

a)  $\tau = RF = (0.25\text{m})(12\text{N}) = 3.0\text{mN}$

b)  $\tau = I\alpha$

$\alpha = \frac{\tau}{I}$ ; De las tablas  $I = \frac{1}{2}mR^2$  para el disco

$$\alpha = \frac{3.0\text{mN}}{\frac{1}{2}(8.0\text{kg})(0.25\text{m})^2 \text{kg.m}^2}$$

$$\alpha = 12.0 \text{ rad/s}^2$$

c) La aceleración del extremo de la cuerda es una aceleración tangencial.

$$a_t = \alpha R = (12.0 \text{ rad/s}^2)(0.25\text{m}) = 3.0\text{m/s}^2$$

d) El disco rota con  $\alpha$  constante

$$W = W_0 + \alpha t$$

$$W = \alpha t = (12.0 \text{ rad/s}^2)(2.0\text{s})$$

$$W = 24.0 \text{ rad/s}$$

## CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

---

e) La velocidad del extremo de la cuerda es una velocidad tangencial.

$$v = WR$$

$$v = (24.0 \text{ rad/s})(0.25\text{m})$$

$$v = 6.0 \text{ m/s}$$

$$f) K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} mR^2 \right) \omega^2$$

$$K = \frac{1}{4} m (R\omega)^2$$

$$K = \frac{1}{4} (8.0\text{kg}) (6.0\text{m/s})^2$$

$$K = 72.0\text{J}$$

$$g) \Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} (12.0 \text{ rad/s}^2)(2.0\text{s})^2$$

$$\Delta\theta = 24.0 \text{ rad}$$