BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Nguyễn Ngọc Kiên

ĐỒ THỊ HÀM SỐ TRONG MỐI LIÊN HỆ VỚI BIỂU THỨC ĐẠI SỐ CỦA MỘT HÀM SỐ Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ GIÁO DỤC HỌC

Thành phố Hồ Chi Minh – 2012

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

Nguyễn Ngọc Kiên

ĐỒ THỊ HÀM SỐ TRONG MỐI LIÊN HỆ VỚI BIỂU THỨC ĐẠI SỐ CỦA MỘT HÀM SỐ Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

Chuyên ngành : Lý luận và phương pháp dạy học môn Toán
Mã số : 60 14 10

LUẬN VĂN THẠC SĨ GIÁO DỤC HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. LÊ THÁI BẢO THIÊN TRUNG

Thành phố Hồ Chí Minh - 2012

LỜI CÁM ƠN

Đầu tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Thái Bảo Thiên Trung, người đã nhiệt tình hướng dẫn và giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn PGS.TS. Lê Thị Hoài Châu, TS. Trần Lương Công Khanh, PGS.TS. Lê Văn Tiến, TS. Lê Thái Bảo Thiên Trung, đã nhiệt tình giảng dạy, truyền thụ cho chúng tôi những kiến thức cơ bản và rất thú vị về didactic toán, cung cấp cho chúng tôi những công cụ hiệu quả để thực hiện việc nghiên cứu cũng như áp dụng vào giảng dạy Toán.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn:

- PGS.TS. Annie Bessot, TS. Alain Birebent đã bỏ công từ Pháp sang Việt Nam để góp ý hướng nghiên cứu đề tài và giải đáp những thắc mắc trong nghiên cứu Didactic Toán cho chúng tôi.

- Ban giám hiệu và các thầy cô đồng nghiệp trường THPT Ngô Quyền, TPHCM đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học cũng như tạo điều kiện cho tôi trong các thực nghiệm suốt quá trình học.

- Ban lãnh đạo và chuyên viên Phòng KHCN – SĐH Trường ĐHSP TP.HCM đã tạo điều kiện thuận lợi cho chúng tôi trong suốt khóa học.

Lời cảm ơn chân thành xin được gửi đến tất cả các bạn cùng khóa, những người đã cùng tôi chia sẻ những buồn vui và những khó khăn trong suốt khóa học.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến những người thân yêu trong gia đình đã luôn động viên và nâng đỡ tôi về mọi mặt.

NGUYỄN NGỌC KIÊN

DANH MỤC CHỮ VIẾT TẮT

SGK	Sách giáo khoa
SBT	Sách bài tập
SGV	Sách giáo viên
THPT	Trung học phổ thông
THCS	Trung học cơ sở
TXD	Tập xác định
NXB	Nhà xuất bản

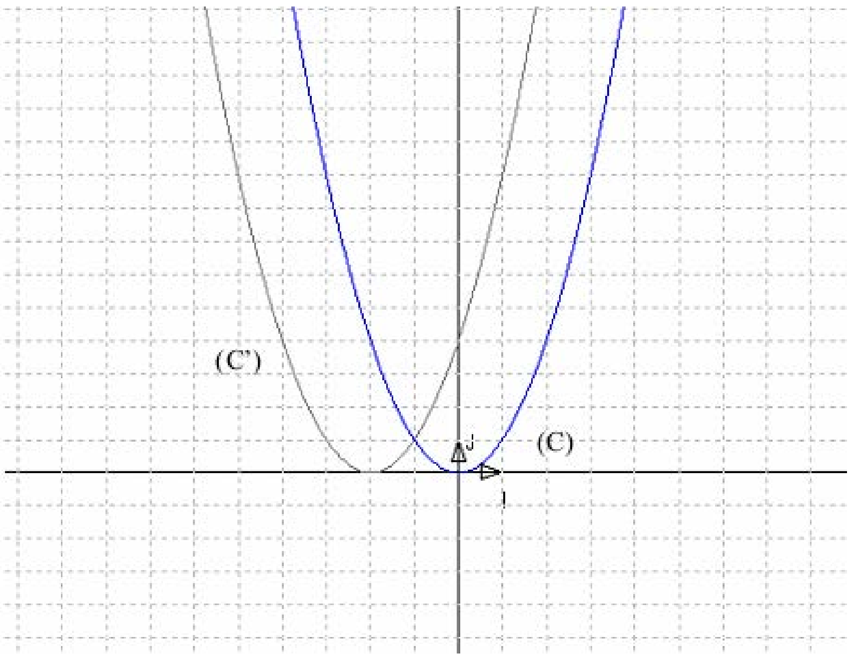
MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Những ghi nhận ban đầu và câu hỏi xuất phát

Chúng tôi bắt đầu với một hiện tượng trong dạy học toán ở trường THPT liên quan đến hàm số và đồ thị hàm số[1] mà chúng tôi ghi nhận khi thực hiện khóa luận tốt nghiệp thực hiện năm 2010. Sau đây chúng tôi xin trích ra một câu hỏi đã được chúng tôi đặt ra cho mộ lớp học gồm 43 học sinh lớp 10 trường THPT Trưng Vương. Cần nói thêm rằng đối tượng học sinh chúng tôi thực nghiệm là đối tượng học sinh khá giỏi của một trường có điểm chuẩn cao trong thành phố.

" **Câu hỏi 1:** Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ có đồ thị là (C) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị (C') như hình 1.



Hình 1

Hãy tìm biểu thức $g(x)$: " ([17], trang 26).

Có hai chiến lược cơ bản cho phép tìm ra đáp án cho câu hỏi 1

Chiến lược 1 (chiến lược tịnh tiến): Tịnh tiến đồ thị

Từ đồ thị ta có thể dễ dàng nhận ra mối liên hệ giữa hai đồ thị hàm số: Tịnh tiến (C) sang trái 2 đơn vị sẽ thu được (C'). Từ đó sử dụng biểu thức của phép tịnh tiến ta có thể nhanh chóng tìm ra biểu thức của hàm số có đồ thị (C') là:

[1] Từ đây về sau, nếu không gây hiểu lầm, ta luôn hiểu đồ thị là đồ thị hàm số.

$y = g(x) = f(x-2) = (x-2)^2$

Chiến lược 2 (chiến lược điểm): Từ đồ thị ta tìm ra tọa độ đỉnh và một điểm mà đồ thị đi qua, từ đó lập hệ phương trình và tìm ra biểu thức của hàm số có đồ thị (C') là: $y = g(x) = x^2 - 4x + 4$

Sau đây là bảng thống kê kết quả thực nghiệm trên 43 học sinh:

Chiến lược	Chiến lược tịnh tiến	Chiến lược điểm	Đưa ra kết quả mà không giải thích	Không có đáp án
Tần suất	1/43	10 /43	3 /43	29/43

Nhận xét: Chỉ có 1 học sinh nhận ra mối liên hệ giữa hai đồ thị để đưa ra chiến lược tịnh tiến. Đối với chiến lược 2 thì có 10 học sinh nghĩ tới, tuy nhiên theo quan sát của chúng tôi thì ở 10 học sinh này không có học sinh nào tìm ra được đủ điểm để thiết lập hệ phương trình.

Bình luận: Hai chiến lược nêu trên khá quen thuộc đối với học sinh lớp 10. Như vậy, tại sao đa số học sinh lại không nghĩ đến hai chiến lược quen thuộc trên?

Để trả lời cho câu hỏi trên, chúng tôi tiến hành phân tích lại nội dung câu hỏi thực nghiệm mà chúng tôi đã thực hiện và nhận thấy rằng để có thể đưa ra hai chiến lược nói trên đòi hỏi học sinh nhận ra được mối liên hệ giữa hai đồ thị (C') và (C) hoặc nhận ra mối liên hệ giữa đồ thị (C') và biểu thức giải tích của nó. Như vậy, nguyên nhân mà đa số học sinh đã không giải được câu hỏi 1 là vì học sinh không nhận ra được mối liên hệ giữa đồ thị (C) và (C') cũng như không nhận ra được mối liên hệ giữa đồ thị (C') với biểu thức giải tích của hàm số. Như vậy, phải chăng ở học sinh tồn tại những khó khăn trong việc thiết lập mối liên hệ giữa các đồ thị hàm số với nhau, giữa đồ thị hàm số với biểu thức giải tích của hàm số? Khó khăn của học sinh có phải xuất phát từ sự lựa chọn của thể chế?

Với những ghi nhận ban đầu như vậy, chúng tôi nhận thấy cần đặt ra câu hỏi:

1. Mối liên hệ giữa đồ thị hàm số với nhau, giữa đồ thị hàm số và biểu thức giải tích được hình thành như thế nào trong dạy học Toán phổ thông ở Việt Nam?
2. Làm thế nào giải thích được khó khăn của học sinh từ sự lựa chọn của thể chế?

2. Mục đích nghiên cứu và khung lý thuyết tham chiếu

Mục đích nghiên cứu của chúng tôi là trả lời những câu hỏi mà chúng tôi đã nêu trong phần trên. Cụ thể chúng ta cần làm rõ mối liên hệ giữa đồ thị hàm số với nhau, giữa đồ thị hàm số và biểu thức giải tích trong thể chế dạy học Toán phổ thông ở Việt Nam. Mối quan hệ này được thể hiện qua mối quan hệ thể chế với khái niệm đồ thị hàm số, trong các tổ chức toán học liên quan đến đồ thị hàm số. Như vậy, để trả lời cho câu hỏi 1 chúng ta cần làm rõ mối quan hệ thể chế với khái niệm đồ thị hàm số, làm rõ các tổ chức toán học liên quan đến khái niệm đồ thị hàm số. Cũng từ những phân tích này sẽ giúp chúng ta rút ra những quy tắc hợp đồng didactic chi phối ứng xử của học sinh với khái niệm đồ thị hàm số. Những quy tắc này sẽ giúp chúng ta giải thích được khó khăn của học sinh từ sự lựa chọn của thể chế.

Tóm lại, để đạt được mục đích nghiên cứu như đã nói, chúng tôi sẽ sử dụng các công cụ của didactic là: Các công cụ của lý thuyết nhân chủng học (mối quan hệ thể chế và quan hệ cá nhân đối với một đối tượng tri thức, tổ chức toán học), của lý thuyết tình huống (hợp đồng didactic).

Trong khuôn khổ của luận văn này, chúng tôi giới hạn nghiên cứu mối liên hệ giữa đồ thị hàm số với nhau và giữa đồ thị hàm số với biểu thức giải tích của nó xung quanh phép biến đổi đồ thị. Như vậy, với ngôn ngữ của các lí thuyết Didactic, chúng tôi phát biểu lại các câu hỏi như sau:

1. Mối quan hệ thể chế với khái niệm đồ thị hàm số được xây dựng như thế nào trong thể chế dạy học Toán bậc phổ thông ở Việt Nam ? Cụ thể hơn : mối liên hệ giữa đồ thị hàm số với nhau, giữa đồ thị hàm số và biểu thức giải tích được hình thành như thế nào trong dạy học Toán phổ thông ?

2. Phép biến đổi đồ thị có vai trò gì trong việc nghiên cứu hàm số và đồ thị hàm số trong thể chế dạy học Toán phổ thông Việt Nam?

3. Phương pháp nghiên cứu

Để đạt được mục đích nghiên cứu trên chúng tôi sẽ tiến hành các công việc sau :

- Trước hết chúng tôi sẽ tiến hành phân tích thể chế dạy học Toán phổ thông ở Việt Nam nhằm làm rõ mối liên hệ giữa đồ thị hàm số với biểu thức giải tích của hàm số. Để làm được điều này, chúng tôi sẽ lựa chọn phân tích các SGK Toán theo chương trình hiện hành ở bậc THPT. Các nghiên cứu này sẽ giúp chúng tôi tìm ra các yếu tố giúp trả lời cho các câu hỏi đặt ra ở phần trên, đồng thời đưa ra các câu hỏi nghiên cứu hay giả thuyết nghiên cứu.
- Phần thực nghiệm sẽ giúp chúng tôi kiểm tra tính đúng đắn của giả thuyết đưa ra cũng như tìm các yếu tố để trả lời các câu hỏi nghiên cứu. Thực nghiệm sẽ được tiến hành theo hình thức câu hỏi thực nghiệm và được tiến hành trên đối tượng học sinh lớp 10, lớp 11 và lớp 12.

4. Cấu trúc luận văn

Luận văn gồm có phần mở đầu, phần kết luận và 3 chương.

- Phần mở đầu trình bày một số ghi nhận và câu hỏi ban đầu dẫn đến việc chọn đề tài, mục đích nghiên cứu, phạm vi lí thuyết tham chiếu, phương pháp nghiên cứu và cấu trúc của luận văn.
- Trong chương 1 chúng tôi sẽ trình bày các phân tích khái niệm đồ thị trong thể chế dạy học Toán phổ thông ở Việt Nam. Cụ thể chúng tôi sẽ làm rõ mối quan hệ thể chế với khái niệm đồ thị hàm số, đặc biệt là mối liên hệ giữa đồ thị hàm số với biểu thức giải tích của hàm số được hình thành như thế nào trong thể chế.
- Chương 2 sẽ trình bày các thực nghiệm sư phạm.
- Phần kết luận trình bày tóm lược các kết quả đã đạt được qua các chương 1, 2 của luận văn và đề cập đến những hướng nghiên cứu mới có thể mở ra từ luận văn.

CHƯƠNG I: PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ TRONG THỂ CHẾ DẠY HỌC TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VIỆT NAM

A. Mục tiêu của chương

Mục tiêu phân tích của chương này là làm rõ mối quan hệ thể chế với khái niệm đồ thị hàm số, đặc biệt là đối với phép biến đổi đồ thị nhằm trả lời cho hai câu hỏi:

Q_1: Mối quan hệ thể chế với khái niệm đồ thị hàm số được xây dựng như thế nào trong thể chế dạy học Toán bậc phổ thông ở Việt Nam ? Cụ thể hơn : mối liên hệ giữa đồ thị hàm số với nhau, giữa đồ thị hàm số và biểu thức giải tích được hình thành như thế nào trong dạy học Toán phổ thông ?

Q_2: Mối liên hệ đó thể hiện như thế nào qua phép biến đổi đồ thị? Vai trò của phép biến đổi đồ thị trong dạy học Toán ở THPT?

Để làm được điều này chúng tôi tiến hành phân tích chương trình và các bộ SGK Toán theo chương trình nâng cao năm 2006[1]. Cụ thể hơn, phân tích của chúng tôi dựa trên các tài liệu sau:

1) Các SGK theo chương trình nâng cao gồm: Đại số 10, Đại số và giải tích 11, Giải tích 12.

2) Các SBT theo chương trình nâng cao gồm: Bài tập đại số 10, bài tập đại số và giải tích 11, bài tập giải tích 12.

3) Các tài liệu hướng dẫn giảng dạy Toán 10 – 11 – 12 bao gồm:

+ Chương trình giáo dục phổ thông Môn Toán (Ban hành kèm theo Quyết định số 16/2006/QĐ-BGDĐT ngày 05/05/2006 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo).

+ Các SGV nâng cao tương ứng.

Để có sự đối chiếu giữa hai chương trình chuẩn và nâng cao chúng tôi còn tham khảo thêm các bộ sách tương ứng thuộc chương trình chuẩn.

Ngoài ra, nhằm kế thừa những kết quả đã biết, chúng tôi còn tham khảo những phân tích trong hai luận văn:

[1] Từ đây về sau khi nói đến chương trình và SGK ta sẽ hiểu là chương trình và SGK năm 2006.

+ “Sự chuyển đổi hệ thống biểu đạt trong dạy học hàm số ở lớp 12” của Nguyễn Thị Hồng Duyên.

+ “Biểu diễn đồ thị hàm số và nghiên cứu đường cong qua phương trình của nó ” của tác giả Bùi Anh Tuấn.

B. Nội dung phân tích

1.1. Tổng hợp các kết quả về đồ thị hàm số và biến đổi đồ thị

1.1.1. Những kết quả về hệ thống biểu đạt hàm số

Luận văn “Sự chuyển đổi hệ thống biểu đạt trong dạy học hàm số ở lớp 12” của Nguyễn Thị Hồng Duyên cho thấy rằng: “Hàm số có thể được biểu đạt dưới ít nhất là bốn hình thức: bằng một (hay nhiều) công thức, bằng đồ thị, bằng bảng số và bằng lời.” ([4], trang 5).

Mỗi hệ thống biểu đạt có những ưu điểm và vai trò riêng. Vì vậy, “tùy mục đích sử dụng mà người ta cần biểu diễn hàm số ở các hệ thống khác nhau”. Hay nói cách khác, người ta cần phải thực hiện việc chuyển đổi hệ thống biểu đạt hàm số. ([4], trang 9).

Về sự chuyển đổi hệ thống biểu đạt của hàm số trong chương trình THPT, những phân tích trong luận văn cho thấy: “Chương trình Toán THPT chủ yếu đề cập đến hàm số ở hai hệ thống biểu đạt: công thức và đồ thị. (…). Đồng thời, chương trình chỉ đề cập đến sự chuyển đổi một chiều giữa hai hệ thống biểu đạt này: từ công thức sang đồ thị.” ([4], trang 24).

Vấn đề đặt ra trong luận văn này là: Mối liên hệ giữa hai hệ thống biểu đạt trên được hình thành như thế nào trong dạy học Toán phổ thông?

1.1.2. Những kết quả về biến đổi đồ thị

Các kết quả trong phần này được tổng hợp từ những phân tích khoa học luận trong luận văn “Biểu diễn đồ thị hàm số và nghiên cứu đường cong qua phương trình của nó ” của tác giả Bùi Anh Tuấn, trang 14 – 16.

Quan điểm của Gasquet S. và Chuzeville R cho rằng liên quan đến đồ thị hàm số, có ba đối tượng khác là: *hàm số, hệ trục tọa độ*[1] và *đường cong* (dùng để biểu diễn đồ thị hàm số).

Thông thường, đường biểu diễn đồ thị của một hàm số trong những hệ trục toạ độ khác nhau là không giống nhau. Do vậy, đường biểu diễn đồ thị của một hàm số chỉ được xác định khi ta chỉ rõ bộ đôi *hàm số - hệ trục tọa độ*.

Ngược lại, một đường cong trong mặt phẳng được dùng để biểu diễn cho rất nhiều đồ thị các hàm số khác nhau. Và, một bộ đôi *đường cong – hệ trục tọa độ* xác định đường biểu diễn đồ thị của một hàm số duy nhất.

Dựa trên quan điểm trên, những phân tích trong luận văn cho thấy có ba hướng để thực hiện việc chuyển từ một đồ thị này sang một đồ thị khác. Hay nói cách khác là có ba hướng để thực hiện *việc biến đổi đồ thị*.

- Làm việc với hệ trục tọa độ cố định: Cho hàm số *f* có đường biểu diễn đồ thị là G_f và hàm số *h* được biến đổi từ *f*, chẳng hạn $h(x) = f(x+k)$... có đường biểu diễn đồ thị là G_h.

Người ta muốn biết sự liên hệ giữa việc biến đổi đại số từ *f* đến *h* và việc tiến hành biến đổi hình học từ G_f sang G_h và ngược lại.

- Làm việc trên một đường cong cố định: Người ta cho một hàm số f với hệ trục tọa độ *r* và một hàm số khác *g* với hệ trục tọa độ *r'* có tính chất đặc biệt để đồ thị của chúng được biểu diễn trên cùng một đường cong.

- Làm việc trên một hàm số cố định: Cho hàm số f trong hai hệ trục tọa độ $r:(O;\vec{i},\vec{j})$ và $r':(O;h\vec{i},k\vec{j})$ có đường biểu diễn đồ thị lần lượt là $G_{f,r}$ và $G_{f,r'}$ $(h,k>0)$. Việc thay đổi đơn vị sẽ kéo theo việc thay đổi đường biểu diễn đồ thị từ $G_{f,r}$ sang $G_{f,r'}$.

Trong trường hợp làm việc với hệ trục tọa độ cố định, chúng tôi quan tâm đến một định lý được trình bày trong SGV Đại số và giải tích 11 nâng cao ([22], trang 25):

[1] Tác giả luận văn đã dịch là *mục tiêu*.

“Giả sử đã biết đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ (trong hệ tọa độ Oxy với vectơ đơn vị trên trục Ox là $\vec{i}$, trên trục Oy là $\vec{j}$).

Khi đó:

- Đồ thị của hàm số $y = f(x) + a$ có được do tịnh tiến (C) theo vectơ $a\vec{j}$.

- Đồ thị của hàm số $y = f(x - a)$ có được là do tịnh tiến (C) theo vectơ $a\vec{i}$.

- Đồ thị của hàm số $y = af(x)(a \neq 0)$ là ảnh của (C) qua phép co dãn theo phương trục tung (xuống trục hoành) với hệ số co dãn a, tức là ảnh của (C) qua phép biến đổi điểm $(x;y)$ thành điểm $(x;ay)$ (ta có phép dãn khi $|a| > 1$, phép có khi $|a| < 1$, phép đối xứng qua trục hoành khi a = - 1).

- Đồ thị của hàm số $y = f(ax)(a \neq 0)$ là ảnh của (C) qua phép co dãn theo phương trục hoành (xuống trục tung) với hệ số co dãn $\frac{1}{a}$, tức là ảnh của (C) qua phép biến đổi điểm $(x;y)$ thành điểm $\left(\frac{x}{a};y\right)$ (ta có phép dãn khi $|a| > 1$, phép có khi $|a| < 1$, phép đối xứng qua trục tung khi a = - 1).”

Bây giờ ta xét hàm số $y = f(x)$ và hàm số $y = h(x) = af\left[k(x - d)\right] + c$. Ứng dụng định lý trên cho phép ta rút ra được sự liên hệ giữa việc biến đổi đại số từ f đến h với việc biến đổi hình học từ đồ thị G_f của hàm số f đến đồ thị G_h của hàm số h như sau:

Lần lượt thực hiện các phép biến đổi sau ta sẽ được đồ thị G_h từ G_f:

- Mở rộng hay thu hẹp đồ thị G_f theo phương trục tung với hệ số $|a|$ ta được đồ thị G_{f_1}, (nếu $a < 0$ thì sau khi mở rộng hay thu hẹp phải lấy đối xứng qua trục hoành).
- Mở rộng hay thu hẹp đồ thị G_{f_1} theo phương trục tung với hệ số $\frac{1}{|k|}$ ta được đồ thị G_{f_2}, (nếu $k < 0$ thì sau khi mở rộng hay thu hẹp phải lấy đối xứng qua trục tung).
- Tịnh tiến đồ thị G_{f_2} theo vectơ $d\vec{i} + c\vec{j}$ ta được đồ thị G_h của hàm số h.

Với việc vận dụng mối liên hệ trên, người ta có thể vẽ đồ thị của các hàm số mà biểu thức đại số của nó được biến đổi từ biểu thức đại số của một hàm số gốc (parent function). Người ta còn gọi những hàm số có mối liên hệ như vậy là họ hàm số (family function).

Lợi ích của phép biến đổi đồ thị còn được thể hiện qua việc kế thừa các tính chất của hàm số qua hàm số cho trước. Chẳng hạn, nếu hàm số *h* có đồ thị là G_h là ảnh của đồ thị G_f của hàm số f qua phép biến đổi đồ thị, đặc biệt là phép tịnh tiến đồ thị. Khi đó, mọi tính chất của hàm số *h* đều có thể suy ra từ tính chất của hàm số *f* mà không cần phải khảo sát hàm số *h* nữa.[1]

Với những kết quả trên, trong chương này, chúng tôi quan tâm đến việc trả lời các câu hỏi sau: Chương trình và SGK đề cập đến những hướng biến đổi đồ thị nào trong ba hướng trên? Phép biến đổi đồ thị tương ứng trong mỗi trường hợp là gì? Mối liên hệ giữa đồ thị hàm số (đường biểu diễn đồ thị) với biểu thức đại số thể hiện như thế nào trong chương trình và SGK tương ứng với mỗi hướng biến đổi đồ thị?

Với mong muốn trả lời hàng loạt các câu hỏi đặt ra, chúng tôi tiến hành phân tích chương trình và SGK.

1.2. Phân tích chương trình

1.2.1. Đồ thị hàm số trong chương trình Toán lớp 10

Chương trình Đại số lớp 10 cơ bản và nâng cao đều đề cập đến các khái niệm cơ bản của hàm số như tập xác định, đồ thị của hàm số, khái niệm hàm số đồng biến, nghịch biến, khái niệm hàm số chẵn, hàm số lẻ.

Tiếp theo các khái niệm cơ bản, chương trình đề cập đến việc khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số bậc nhất, hàm số bậc hai, hàm số bậc nhất trên từng khoảng đặc biệt là đồ thị hàm số $y = |ax + b|$. Chương trình đại số 10 nâng cao còn đề cập đến việc vẽ đồ thị hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$.

---

[1] Nhận định được bổ sung theo sự góp ý của TS. Nguyễn Thị Nga.

Yêu cầu của chương trình nâng cao đối với học sinh khi học về hàm số và đồ thị là ([21], trang 66):

"Chương này giúp học sinh:

- Về kiến thức

- Nắm được các khái niệm: hàm số, đồ thị của hàm số, hàm số đồng biến nghịch biến trên một khoảng, hàm số chẵn, hàm số lẻ.

- Hiểu các phép tịnh tiến đồ thị song song với trục tọa độ

- Nắm được sự biến thiên, đồ thị và tính chất của hàm số bậc nhất và hàm số bậc hai.

- Về kĩ năng

- Biết cách vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất, bậc nhất trên từng khoảng và hàm số bậc hai.

- Nhận biết được sự biến thiên và một vài tính chất của hàm số thông qua đồ thị của nó."

Như vậy, chương trình đại số 10 nâng cao đòi hỏi học sinh có khả năng sử dụng đồ thị hàm số trong việc xét sự biến thiên và một vài tính chất của hàm số. Câu hỏi ở đây là: Nhận biết một vài tính chất của hàm số thông qua đồ thị hàm số nghĩa là nhận biết những tính chất gì? Kĩ năng nhận biết sự biến thiên và một vài tính chất đó được thể hiện như thế nào trong các kiểu nhiệm vụ có mặt trong SGK?

Ngoài ra, trong đoạn trích trên ta thấy chương trình đại số 10 nâng cao đề cập đến một phép biến đổi đồ thị đó là phép tịnh tiến đồ thị song song với các trục tọa độ, gọi tắt là phép tịnh tiến đồ thị. Như vậy, với sự có mặt của phép tịnh tiến đồ thị, việc đọc sự biến thiên và một vài tính chất của hàm số sẽ được thực hiện như thế nào trong các kiểu nhiệm vụ có mặt trong SGK?

Yêu cầu của chương trình đại số 10 cơ bản cũng tương tự như chương trình nâng cao, tuy nhiên chương trình cơ bản không yêu cầu học sinh về phép tịnh tiến đồ thị.

1.2.2. Đồ thị hàm số trong chương trình Toán lớp 11

Chương trình Đại số và giải tích 11 cơ bản và nâng cao đều đề cập đến đồ thị các hàm số lượng giác cơ bản bao gồm đồ thị các hàm số $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \tan x$; $y = \cot x$.

Yêu cầu của chương trình Đại số và giải tích nâng cao đối với hàm số lượng giác là ([22], trang 17):

"

- Về kiến thức

Giúp học sinh

- Hiểu rằng trong định nghĩa các hàm số lượng giác $y = \sin x, y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, x là số thực và là số đo rađian (không phải số đo độ) của góc (cung) lượng giác.

- Hiểu tính chất chẵn – lẻ, tính chất tuần hoàn của các hàm số lượng giác; tập xác định và tập giá trị của các hàm số đó.

- Biết dựa vào trục sin, trục côsin, trục tang, trục côtang gắn với đường tròn lượng giác để khảo sát sự biến thiên của các hàm số tương ứng rồi thể hiện sự biến thiên đó trên đồ thị.

- Về kĩ năng

Giúp học sinh nhận biết hình dạng và vẽ đồ thị của các hàm số lượng giác cơ bản (thể hiện tính tuần hoàn, tính chẵn – lẻ, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, giao với trục hoành, …)."

Như vậy, có hai kĩ năng cơ bản liên quan đến đồ thị hàm số lượng giác thể hiện trong chương trình là kĩ năng nhận dạng đồ thị và kĩ năng vẽ đồ thị hàm số lượng giác. Câu hỏi đặt ra là: Công cụ nào giúp học sinh nhận dạng đồ thị cũng như vẽ đồ thị hàm số lượng giác?

Các yêu cầu của chương trình Đại số và giải tích cơ bản cũng tương tự như yêu cầu của chương trình nâng cao.

1.2.3. Đồ thị hàm số trong chương trình Toán lớp 12

Chương trình Giải tích 12 cơ bản và nâng cao đều đề cập đến việc ứng dụng của đạo hàm để vẽ đồ thị hàm số và tiếp tục nghiên cứu đồ thị của ba loại hàm số: hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit.

Nếu như ở chương trình lớp 10 và lớp 11, việc xét tính đơn điệu của hàm số chủ yếu dựa vào những nhận xét trực quan thông qua đồ thị hay qua đường tròn lượng giác thì chương trình Giải tích 12 yêu cầu việc xét tính đơn điệu phải thông qua các tính toán chính xác trên các biểu thức đại số với công cụ đạo hàm, ở đây là xét dấu của đạo hàm. SGV Giải tích 12 nêu rõ ([14], trang 3):

"- Biết cách xét tính đồng biến, nghịch biến của một hàm số trên một khoảng dựa vào dấu đạo hàm cấp một của nó"

Chương trình yêu cầu việc vẽ đồ thị hàm số phải được tiến hành sau khi đã xét sự biến thiên. Yêu cầu của chương trình được nêu rõ trong SGV Giải tích 12:

> "- Biết sơ đồ tổng quát để khảo sát hàm số (tìm tập xác định, xét chiều biến thiên, tìm cực trị, tìm tiệm cận, lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị.)" ([14], trang 4)
>
> "- Biết cách khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c\left(a \neq 0\right)$; $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\left(a \neq 0\right)$; $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\left(ac \neq 0\right)$." ([14], trang 5)
>
> " - Biết cách dùng đồ thị để biện luận số nghiệm của một phương trình." ([14], trang 5)

Yêu cầu của chương trình Giải tích 12 nâng cao cũng tương tự. Tuy nhiên, chương trình nâng cao còn yêu cầu học sinh biết cách khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$.

Yêu cầu cuối cùng liên quan đến việc biện luận nghiệm của phương trình bằng đồ thị. Để giải quyết được các bài toán biện luận nghiệm của phương trình bằng đồ thị đòi hỏi học sinh phải hiểu được mối liên hệ giữa đồ thị hàm số với biểu thức đại số của nó. Cụ thể hơn, học sinh cần hiểu rõ: nghiệm của phương trình $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ chính là hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$. Vì vậy, số giao điểm của hai đồ thị chính là số nghiệm của phương trình và ngược lại, số nghiệm của phương trình cũng là số giao điểm của hai đồ thị.

Chương trình Giải tích 12 nâng cao còn đề cập đến phép tịnh tiến hệ tọa độ như một công cụ để xác định tính đối xứng của đồ thị hàm số ([23], trang 50):

> "- Áp dụng phép tịnh tiến hệ tọa độ, tìm tâm đối xứng của đồ thị hàm đa thức bậc ba và đồ thị của các hàm phân thức hữu tỉ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}; y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ "

Đồ thị các hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit được đề cập ngay sau phần ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (cả chương trình cơ bản và nâng cao).

1.3. Phân tích SGK

Từ những phân tích chương trình cho thấy, phép biến đổi đồ thị chỉ được giảng dạy trong chương trình Đại số và giải tích nâng cao. Vì vậy, trong phần phân tích SGK, chúng tôi chỉ phân tích SGK theo chương trình nâng cao.

1.3.1. Phân tích SGK Toán lớp 10

SGK được sử dụng để phân tích trong phần này là SGK Đại số 10 nâng cao. Trước tiên, chúng ta hãy bắt đầu với đồ thị hàm số.

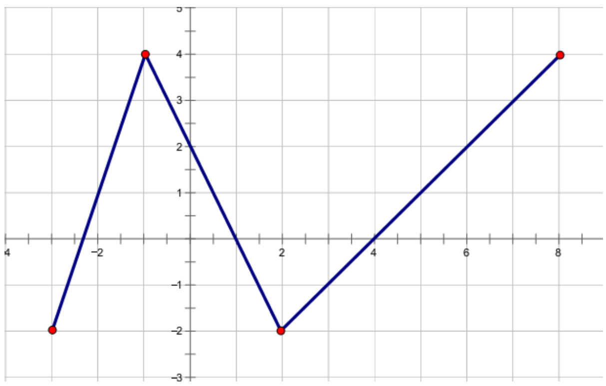
1.3.1.1. Đồ thị hàm số trong SGK Đại số 10

Sau khi trình bày định nghĩa hàm số và TXD của hàm số cho bởi biểu thức, đồ thị hàm số được SGK định nghĩa như sau ([17], trang 36):

> "Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D. Ta đã biết: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp (G) các điểm có tọa độ $(x; f(x))$ với $x \in D$, gọi là đồ thị của hàm số *f*. Nói cách khác,
>
> $M(x_0; y_0) \in (G) \Leftrightarrow x_0 \in D$ và $y_0 = f(x_0)$.
>
> Qua đồ thị của một hàm số, ta có thể nhận biết được nhiều tính chất của hàm số đó."

Như vậy, SGK đề cập đến việc nhận biết một số tính chất của hàm số thông qua đồ thị. Ví dụ 2 sau đây cho ta thấy một số tính chất của hàm số có thể nhận biết dựa vào đồ thị ([17], trang 37):

"**Ví dụ 2:** Hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn [-3;8] được cho bằng đồ thị như trong hình 2.1



Hình 2.1

Dựa vào đồ thị đã cho, ta có thể nhận biết được (với độ chính xác nào đó) :

- Giá trị của hàm số tại một số điểm, chẳng hạn $f(-3) = -2, f(1) = 0$;

- Các giá trị đặc biệt của hàm số, chẳng hạn, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn [- 3; 8] là -2;

- Dấu của $f(x)$ trên một khoảng, chẳng hạn nếu $1 < x < 4$ thì $f(x) < 0$."

Để rèn luyện được kĩ năng nhận biết các tính chất nêu trên của hàm số thông qua đồ thị, học sinh cần hiểu rõ mối liên hệ giữa đồ thị hàm số với biểu thức đại số của nó. Chẳng hạn: giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) tương ứng với điểm thấp nhất (cao nhất) của đồ thị, dấu của biểu thức dương (âm) tương ứng với đồ thị nằm phía trên (dưới) trục hoành…

Kĩ năng xét dấu của biểu thức dựa vào đồ thị còn được SGK sử dụng trong quá trình xây dựng định lý về dấu của tam thức bậc hai trong chương V.

Ngoài những tính chất trên, còn những tính chất nào của hàm số có thể nhận biết bằng đồ thị? Chúng ta hãy xét khái niệm hàm số đồng biến, nghịch biến.

a. Đồ thị hàm số với tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

SGK định nghĩa hàm số đồng biến, nghịch biến như sau ([17], trang 38):

"Cho hàm số *f* xác định trên K[1].

Hàm số *f* gọi là đồng biến (hay tăng) trên K nếu

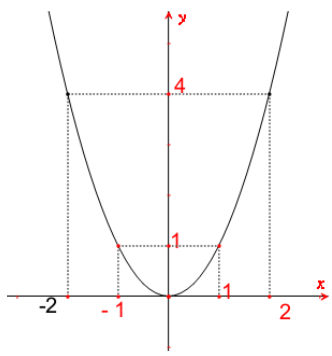
$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

Hàm số *f* gọi là nghịch biến (hay giảm) trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);"$$

Đồ thị hàm số $y = x^2$ cho ta thấy mối liên hệ giữa tính đồng biến, nghịch biến với đồ thị hàm số ([17], trang 38):

"Trong ví dụ 3, ta thấy hàm số $y = x^2$ nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty;0]$ và đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$. Qua đồ thị của nó (h. 2.2) ta thấy: Từ trái sang phải, nhánh trái của parabol (ứng với $x \in (-\infty;0]$) là đường cong đi xuống, thể hiện sự nghịch biến của hàm số; nhánh phải của parabol (ứng với $x \in [0;+\infty)$) là đường cong đi lên, thể hiện sự đồng biến



Hình 2.2

[1] K là một khoảng (nửa khoảng hay đoạn) nào đó của R

của hàm số."

Mối liên hệ giữa tính đồng biến nghịch biến với đồ thị hàm số được phát biểu tổng quát như sau ([17], trang 38):

"Nếu một hàm số đồng biến trên K thì trên đó, đồ thị của nó đi lên;

Nếu một hàm số nghịch biến trên K thì trên đó, đồ thị của nó đi xuống."

Ở đây, lập tức phát sinh một câu hỏi: Điều ngược lại có đúng không? Nghĩa là, nếu đồ thị hàm số đi lên (đi xuống) trên K thì có kết luận được hàm số là đồng biến (nghịch biến) trên K hay không?

Chúng tôi không tìm ra một lời giải thích cụ thể nào cho vấn đề này trong SGK cũng như SGV. Tuy nhiên, việc đưa vào hoạt động 3 liên quan đến việc dựa vào đồ thị hàm số để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số cho thấy SGK đã ngầm ẩn rằng điều ngược lại đúng và chấp nhận tính đúng đắn của việc khảo sát sự biến thiên bằng đồ thị.

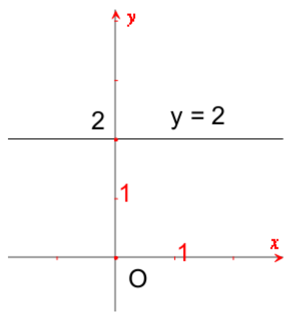
Sau đây là nội dung của hoạt động 3 ([17], trang 38):

"Hàm số cho bởi đồ thị trên hình 2.1 đồng biến trên khoảng nào, nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng (-3; -1), (-1; 2) và (2; 8)?"

Tất nhiên, để hoàn thiện việc khảo sát sự biến thiên của hàm số, cần thiết phải nói về hàm số không đổi ([17], trang 38):

"Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ với mọi x_1 và x_2 thuộc K, tức là $f(x) = c$ với mọi $x \in K$ (c là hằng số) thì ta có hàm số không đổi (còn gọi là hàm số hằng trên K).

Chẳng hạn, $y = 2$ là hàm số không đổi xác định trên $\mathbb{R}$. Nó có đồ thị là đường thẳng song song với trục *Ox* (h.2.3)



Hình 2.3

Tư tưởng của việc khảo sát sự biến thiên của hàm số bằng đồ thị còn được thể hiện qua việc lập bảng biến thiên của một số hàm số đặc biệt như hàm số bậc nhất trên từng khoảng, hàm số $y = |ax + b|$, hàm số bậc hai…. Chẳng hạn, đối với hàm số bậc hai, SGK viết ([17], trang 57):

"Từ đồ thị hàm số bậc hai, ta suy ra bảng biến thiên sau đây:

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\nearrow$ $+\infty$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\searrow$ $-\infty$

Ngoài việc khảo sát sự biến thiên của hàm số bằng đồ thị, SGK còn trình bày phương pháp khảo sát sự biến thiên bằng phép tính đại số. Cụ thể, phương pháp khảo sát sự biến thiên bằng phép tính đại số được dựa vào nhận xét sau ([17], trang 39):

"Điều kiện " $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$" có nghĩa là $x_2 - x_1$ và $f(x_2) - f(x_1)$ cùng dấu.

Do đó

Hàm số f đồng biến trên K khi và chỉ khi

$$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 \neq x_2, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$

Hàm số f nghịch biến trên K khi và chỉ khi

$$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 \neq x_2, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0."$$

Như vậy, dựa vào định nghĩa, SGK đưa ra phương pháp lập tỉ số để xét sự biến thiên.

b. Đồ thị hàm số với tính chẵn – lẻ của hàm số

Khái niệm hàm số chẵn, hàm số lẻ được SGK định nghĩa như sau ([17], trang 40):

"Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D.

Hàm số *f* được gọi là hàm số chẵn nếu với mọi *x* thuộc D, ta có – *x* cũng thuộc D và $f(-x) = f(x)$.

Hàm số *f* được gọi là hàm số lẻ nếu với mọi *x* thuộc D, ta có – *x* cũng thuộc D và $f(-x) = -f(x)$."

Mối liên hệ giữa đồ thị hàm số với tính chẵn – lẻ của hàm số được SGK chứng minh và phát biểu trong định lý sau ([17], trang 40):

"Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng."

Tới đây lập tức phát sinh câu hỏi: Chiều ngược lại của định lý có đúng không? Thể chế có mong muốn hình thành kĩ năng nhận biết tính chẵn – lẻ của hàm số thông qua đồ thị ở học sinh hay không?

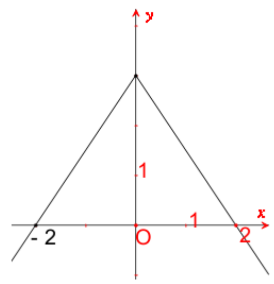
Đoạn trích sau đây trong SGV sẽ giải thích rõ những thắc mắc trên ([21], trang 71):

> "Để đơn giản, SGK chỉ nêu định lý thuận về đồ thị của hàm số chẵn (lẻ) mà không nêu định lý đảo: "Nếu một hàm số có đồ thị đối xứng qua trục tung (qua gốc tọa độ) thì đó là hàm số chẵn (lẻ)". Nhưng trong thực hành, cũng có thể đoán nhận tính chẵn – lẻ của hàm số khi đã biết đồ thị của nó."

Như vậy, thể chế mong muốn hình thành kĩ năng nhận biết tính chẵn – lẻ của hàm số thông qua đồ thị. Hoạt động 6, trang 42 trong SGK đại số 10 nâng cao đòi hỏi kĩ năng đó của học sinh:

> "Cho hàm số f xác định trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ có đồ thị như trên hình 2.5. Hãy ghép mỗi ý ở cột trái dưới đây với một ý ở cột phải để được một mệnh đề đúng.

1) hàm số f là 2) Hàm số f đồng biến 3) Hàm số f nghịch biến	a) Hàm số chẵn b) Hàm số lẻ c) Trên khoảng $(-\infty;0)$ d) Trên khoảng $(0;+\infty)$ e) Trên khoảng $(-\infty;-\infty)$



Như vậy, yêu cầu về kĩ năng nhận biết các tính chất của hàm số thông qua đồ thị của chương trình được SGK thể hiện rõ ràng trong việc trình bày lý thuyết cũng như trong các ví dụ và hoạt động. Để hình thành được kĩ năng đó, học sinh cần hiểu rõ mối liên hệ giữa đồ thị hàm số với biểu thức đại số thể hiện qua các tính chất đó. Mối liên hệ đó có thể tóm tắt như sau:

Tính chất của hàm số thể hiện bởi biểu thức đại số	**Tính chất của hàm số thể hiện qua đồ thị hàm số**
$y_0 = f(x_0)$ (với $x_0 \in D$)[1]	Điểm $(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị của hàm

[1] $y = f(x)$ là một hàm số với tập xác định D.

	số.
$f(x) > 0, \forall x \in K$ [1]	Đồ thị của hàm số nằm phía trên trục hoành khi $x \in K$.
$f(x) < 0, \forall x \in K$	Đồ thị của hàm số nằm phía dưới trục hoành khi $x \in K$.
Hàm số đồng biến trên *K*: $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.	Trên *K*, đồ thị của hàm số đi lên (theo chiều tăng của đối số).
Hàm số nghịch biến trên *K*: $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.	Trên *K*, đồ thị của hàm số đi xuống (theo chiều tăng của đối số).
Hàm số không đổi trên *K*: $y = m$ (m là hằng số).	Đồ thị của hàm số nằm trên đường thẳng song song (hoặc trùng) với trục hoành.
$y = f(x)$ là hàm số chẵn: $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$	Đồ thị hàm số có trục đối xứng là trục tung.
$y = f(x)$ là hàm số lẻ: $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$	Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là gốc tọa độ.

Những phân tích phần lý thuyết của SGK cho thấy kĩ năng nhận biết các tính chất của hàm số thông qua đồ thị được thể chế chú trọng. Các tính chất của hàm số có thể nhận biết thông qua đồ thị hàm số được SGK đề cập đến là: Giá trị của hàm số tại một điểm, giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất, dấu của biểu thức, tính đơn điệu của hàm số, tính chẵn – lẻ của hàm số. Tuy nhiên, để những kĩ năng đó thực sự được hình thành ở học sinh cần thiết phải được rèn luyện trong phần bài tập. Sau đây, chúng tôi sẽ phân tích các tổ chức toán học gắn liền với các kiểu nhiệm vụ có sử dụng đồ thị hàm số làm yếu tố kĩ thuật.

c. Tổ chức toán học

[1] K là một khoảng (nửa khoảng hay đoạn) nằm trong D.

Có ba kiểu nhiệm vụ mà ở đó, đồ thị được sử dụng như là yếu tố chính trong kĩ thuật:

- Kiểu nhiệm vụ T_1: Xét dấu biểu thức bằng đồ thị.
- Kiểu nhiệm vụ T_2: Xét tính chẵn – lẻ của hàm số bằng đồ thị.
- Kiểu nhiệm vụ T_3: Xét tính đồng biến – nghịch biến của hàm số.

❖ **Kiểu nhiệm vụ T_1: Xét dấu biểu thức bằng đồ thị**

Có 3 câu trên tổng số 110 câu của chương 2 ứng với kiểu nhiệm vụ T_1

Chúng ta hãy xét một ví dụ trong SGK (bài 32, trang 59, Đại số 10 – NC):

"Với mỗi hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ và $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$, hãy:

a. Vẽ đồ thị của hàm số;

b. Tìm tập hợp các giá trị x sao cho y > 0;

c. Tìm tập hợp các giá trị x sao cho y < 0."

Sau đây là lời giải từ SGV ([21], trang 87):

"Đặt $f(x) = -x^2 + 2x + 3$; $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$. Từ đồ thị suy ra:

b. $f(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3; g(x) > 0 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 2$;

c. $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 3; g(x) < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 2$."

Lời giải trên cho thấy đồ thị là yếu tố chính trong kĩ thuật giải quyết kiểu nhiệm vụ T_1. Cụ thể, để xét dấu biểu thức $f(x)$ nào đó, ta sử dụng kĩ thuật sau:

Kĩ thuật τ_1:

- Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$;
- Trên khoảng mà đồ thị nằm trên trục hoành thì $f(x) > 0$, trên khoảng mà đồ thị nằm dưới trục hoành thì $f(x) < 0$.

Nhận xét về kiểu nhiệm vụ T_1:

Yếu tố đồ thị trong các bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ T_1 được cho trước.

❖ **Kiểu nhiệm vụ T_2: Xét tính chẵn – lẻ của hàm số bằng đồ thị**

Có một câu ứng với kiểu nhiệm vụ T_2 là hoạt động 6 , trang 42, SGK đại số 10 – nâng cao đã được chúng tôi đưa ra ở phần trước.

Đồ thị hàm số là yếu tố chính trong kĩ thuật của kiểu nhiệm vụ này. Kĩ thuật giải dựa trên định lý đảo của định lý về đồ thị của hàm số chẵn - lẻ trong SGK.

Nhận xét:

Chỉ có một câu trong phần hoạt động cho thấy việc sử dụng đồ thị hàm số trong việc xét tính chẵn – lẻ của hàm số chứng tỏ kiểu nhiệm vụ này không được thể chế quan tâm. Đều này hoàn toàn phù hợp, bởi lẽ trên thực tế, người ta thường quan tâm đến việc lợi dụng tính chẵn – lẻ của hàm số trong việc đơn giản hóa việc khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số chứ ít khi làm ngược lại. Điều này cũng được thể hiện trong SGK qua đoạn trích sau:

> "Có những hàm số có một số tính chất đặc biệt, dễ nhận thấy mà ta có thể lợi dụng để việc khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của nó đơn giản và dễ dàng hơn. Tính chất chẵn – lẻ của hàm số là một ví dụ." ([17], trang 40)

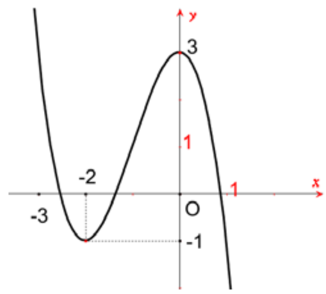
❖ **Kiểu nhiệm vụ T_3: Xét tính đồng biến – nghịch biến của hàm số**

Có 24 câu thuộc kiểu nhiệm vụ T_3 trên tổng số 110 câu của chương 2.

Chúng ta xét một vài ví dụ về kiểu nhiệm vụ này.

Ví dụ 1 (bài 3, trang 45, Đại số 10 – NC):

> "Hình 2.9 là đồ thị của một hàm số có tập xác định là R. Dựa vào đồ thị, hãy lập bảng biến thiên của hàm số đó."



Hình 2.9

Ví dụ 2 (bài 18, trang 52, Đại số 10 – NC):

> "Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{khi } -2 \le x < 1 \\ -2x & \text{khi } -1 \le x \le 1 \\ x-3 & \text{khi } 1 < x \le 3. \end{cases}$
>
> a) Tìm tập xác định và vẽ đồ thị của hàm số đó.
>
> b) Cho biết sự biến thiên của hàm số đã cho trên mỗi khoảng (- 2; -1), (-1;1) và (1;3) và lập bảng biến thiên của nó."

Dựa vào lời giải của hai ví dụ trên trong SGV cho phép chúng ta đưa ra kĩ thuật giải $\tau_{3.1}$ như sau:

Kĩ thuật $\tau_{3.1}$: (Kĩ thuật đồ thị)

- Vẽ đồ thị hàm số
- Nếu trên khoảng (a;b) mà đồ thị đi lên (đi xuống) thì hàm số đồng biến (nghịch biến).

Chúng ta hãy xét thêm một ví dụ khác trong SGK đại số 10 – NC trang 45:

"Khảo sát sự biến thiên của mỗi hàm số sau và lập bảng biến thiên của nó:

a) $y = x^2 + 2x - 2$ trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

(…)"

Sau đây là lời giải của SGV ([21],trang 74):

"Ta có: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{(x_1^2 + 2x_1 - 2) - (x_2^2 + 2x_2 - 2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 + 2$

Trên khoảng $(-\infty;-1)$, hàm số nghịch biến vì

$$x_1; x_2 \in (-\infty;-1) \Rightarrow x_1 < -1; x_2 < -1 \Rightarrow x_1 + x_2 + 2 < 0.$$

Trên khoảng $(-1;+\infty)$, hàm số đồng biến vì

$$x_1; x_2 \in (-1;+\infty) \Rightarrow x_1 > -1; x_2 > -1 \Rightarrow x_1 + x_2 + 2 > 0."$$

Lời giải trên cho phép chúng ta rút ra kĩ thuật giải khác như sau:

Kĩ thuật $\tau_{3.2}$: (Kĩ thuật đại số)

- Lập tỉ số $k = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$
- Nếu $k > 0$ trên (*a;b*) thì hàm số đồng biến
- Nếu $k < 0$ trên (*a;b*) thì hàm số nghịch biến.

Nhận xét về kiểu nhiệm vụ T_3:

Với số lượng bài tập khá nhiều (24/110 câu của chương 2) chứng tỏ kiểu nhiệm vụ T_3 được thể chế quan tâm.

Dựa vào lời giải của SGV, chúng tôi nhận thấy trong số 24 câu thuộc T_3 có 16 câu được giải theo kĩ thuật $\tau_{3.1}$ (kĩ thuật đồ thị) và 8 câu được giải theo kĩ thuật $\tau_{3.2}$ (kĩ

thuật đại số). Như vậy, việc khảo sát sự biến thiên của hàm số bằng đồ thị là một kĩ năng được xem trọng trong SGK.

Đặc điểm của các bài tập liên quan đến kiểu nhiệm vụ T_3:

+ Đối với các câu được giải bằng kĩ thuật đại số, đề bài cho trước các khoảng cần xét sự biến thiên.
+ Đối với các câu mà thể chế mong muốn được giải bằng kĩ thuật đồ thị thì yếu tố đồ thị được cho trước.

Từ những phân tích về 3 kiểu nhiệm vụ ta có một vài nhận xét:

- Có 20 câu hỏi trên tổng số 110 câu hỏi của chương 2 thể hiện việc khảo sát các tính chất của hàm số bằng đồ thị chứng tỏ kĩ năng nhận biết các tính chất bằng đồ thị được chú trọng trong SGK.
- Các tính chất mà SGK mong muốn được nhận biết thông qua đồ thị là: dấu của biểu thức đại số, giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất, tính chẵn – lẻ của hàm số và được biệt là tính đồng biến – nghịch biến của hàm số.
- Đối với các bài tập mà đồ thị hàm số là yếu tố kĩ thuật, đề bài thường cho trước đồ thị.

Từ những nhận định trên, chúng tôi đặt ra câu hỏi:

- *Trong trường hợp đồ thị hàm số không được cho trước, học sinh có biết tự vẽ đồ thị rồi sử dụng đồ thị hàm số trong việc xét dấu biểu thức, xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất và đặc biệt là khảo sát tính đồng biến – nghịch biến của hàm số hay không?*

Một thực nghiệm sẽ được tiến hành nhằm tìm kiếm những yếu tố giúp trả lời câu hỏi trên.

Qua các phân tích trên chúng ta nhận thấy kĩ năng nhận biết các tính chất của hàm số, đặc biệt là tính đồng biến, nghịch biến của hàm số được thể chế chú trọng thể hiện qua các kiểu nhiệm vụ với số lượng bài tập tương đối nhiều. Thông qua việc rèn luyện kĩ năng này, học sinh sẽ hiểu được mối liên hệ giữa đồ thị hàm số với các tính chất của hàm số cũng như với biểu thức đại số của hàm số. Vấn đề đặt ra tiếp theo là với công cụ biến đổi đồ thị, việc nghiên cứu hàm số được thực hiện như thế

nào trong SGK? Mối liên hệ giữa đồ thị hàm số và biểu thức đại số thể hiện như thế nào qua phép biến đổi đồ thị?

1.3.1.2. Phép biến đổi đồ thị trong SGK đại số 10

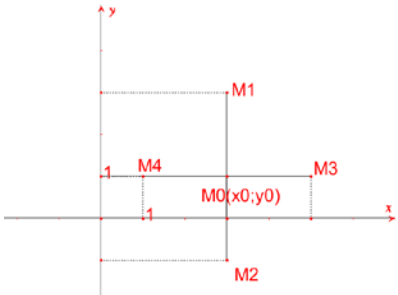
Phép biến đổi đồ thị được đề cập trong SGK đại số 10 Nâng cao là phép tịnh tiến đồ thị.

Để trình bày phép tịnh tiến đồ thị, trước tiên SGK trình bày về việc tịnh tiến một điểm ([17], trang 42):

> "Trong mặt phẳng tọa độ, xét điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$. Với số k > 0 đã cho, ta có thể dịch chuyển điểm M_0:
>
> - Lên trên hoặc xuống dưới (theo phương của trục tung) k đơn vị
> - Sang trái hoặc sang phải (theo phương của trục hoành) k đơn vị
>
> Khi dịch chuyển điểm M_0 như thế, ta còn nói rằng tịnh tiến điểm M_0 song song với trục tọa độ"

Hoạt động 7 trong SGK giúp học sinh hình thành sự liên hệ giữa tọa độ của các điểm trước và sau khi tịnh tiến ([17], trang 42):

> "Giả sử M_1, M_2, M_3 và M_4 là các điểm có được khi tịnh tiến điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ theo thứ tự lên trên, xuống dưới, sang phải và sang trái 2 đơn vị (…).
> Hãy cho biết tọa độ của các điểm M_1, M_2, M_3 và M_4"



Mối liên hệ giữa các đồ thị hàm số với nhau thông qua phép tịnh tiến được thể hiện bởi định lý sau đây trong SGK ([17], trang 43):

> "Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị (G) của hàm số y = f (x); p và q là hai số dương tùy ý. Khi đó:
>
> 1) Tịnh tiến (G) lên trên q đơn vị thì được đồ thị của hàm số y = f (x) + q;
> 2) Tịnh tiến (G) xuống dưới q đơn vị thì được đồ thị của hàm số y = f (x) - q;
> 3) Tịnh tiến (G) sang trái p đơn vị thì được đồ thị của hàm số y = f (x + p) ;
> 4) Tịnh tiến (G) sang phải p đơn vị thì được đồ thị của hàm số y = f (x – p); "

Từ định lý trên, ta thấy để nghiên cứu đồ thị bằng phép tịnh tiến đồ thị, người ta làm việc với một hệ trục tọa độ cố định. Chúng ta có thể mô tả cách làm này như sau:

Trong hệ trục tọa độ cố định, người ta cho đường biểu diễn đồ thị G_f của hàm số $x \mapsto f\left(x\right)$. Sau đó, ta xét một hàm số có mối liên hệ với hàm số đã cho. Chẳng hạn, hàm số $x \mapsto h\left(x\right) = f\left(x+k\right)$ hay $x \mapsto h\left(x\right) = f\left(x\right)+k$ có đường biểu diễn đồ thị G_h. Phép tịnh tiến thể hiện sự liên hệ giữa việc biến đổi đại số từ f đến h và việc tiến hành biến đổi hình học từ G_f sang G_h và ngược lại.

Với phép tịnh tiến đồ thị, ta thấy đường biểu diễn đồ thị G_h của hàm số h có được bằng cách tịnh tiến đường cong biểu diễn đồ thị G_f của hàm số f. Do đó, hai đường cong trên sẽ giống hệt nhau. Hay nói cách khác, tính chất của G_h có thể được suy ra từ G_f. Câu hỏi đặt ra là: SGK khai thác mối liên hệ này như thế nào? Cụ thể hơn: SGK sử dụng phép tịnh tiến trong việc khảo sát tính chất của hàm số như thế nào?

Trước hết, trong phần lý thuyết chúng ta nhận thấy SGK sử dụng phép tịnh tiến đồ thị trong việc nghiên cứu hàm số bậc hai.

Trước tiên, SGK nhắc lại đồ thị hàm số $y = ax^2\left(a \neq 0\right)$ đã được học trong chương trình lớp 9 ([17], trang 55):

> "Ta đã biết, đồ thị hàm số $y = ax^2\left(a \neq 0\right)$ là parabol (P_0) có các đặc điểm sau:
>
> 1) Đỉnh của parabol (P_0) là gốc tọa độ O;
>
> 2) Parabol (P_0) có trục đối xứng là trục tung;
>
> 3) Parabol (P_0) hướng bề lõm lên trên khi a > 0 và xuống dưới khi a < 0."

Sau đó, bằng công cụ phép tịnh tiến, SGK chứng minh được mọi đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đều có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = ax^2$ ([17], trang 55):

> "Ta đã biết
>
> $$ax^2 + bx + c = \left(...\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
>
> Do đó, nếu đặt $\Delta = b^2 - 4ac, p = \frac{-b}{2a}, q = \frac{-\Delta}{4a}$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có dạng $y = a\left(x - p\right)^2 + q$.
>
> Gọi (P_0) là parabol $y = ax^2$. Ta thực hiện hai phép tịnh tiến liên tiếp như sau:

- Tịnh tiến (P_0) sang phải p đơn vị nếu p >0, sang trái |p| đơn vị nếu p < 0, ta được đồ thị hàm số $y = a(x-p)^2$. Gọi đồ thị này là (P_1).

- Tiếp theo, tịnh tiến (P_1) lên trên q đơn vị nếu q > 0, xuống dưới |q| đơn vị nếu q < 0, ta được đồ thị hàm số $y = a(x-p)^2 + q$, gọi đồ thị này là (P).

Vậy, (P) là đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$"

Như vậy, ta thấy đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = ax^2$ theo vectơ $p\vec{i} + q\vec{j}$. Do đó, các tính chất của đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có thể được suy ra từ đồ thị hàm số $y = ax^2$. Hoạt động 1 và hoạt động 2 sau đây trong SGK giúp học sinh rút ra tính chất của đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ từ đồ thị hàm số $y = ax^2$ qua phép tịnh tiến ([17], trang 56):

"H1: Biết rằng trong phép tịnh tiến thứ nhất, đỉnh O của (P_0) biến thành đỉnh I_1 của (P_1). Từ đó, hãy cho biết tọa độ của I_1 và phương trình trục đối xứng của (P_1)."

"H2: Trong phép tịnh tiến thứ hai, đỉnh I_1 của (P_1) biến thành đỉnh I của (P). Tìm tọa độ của I và phương trình trục đối xứng của (P)."

Tính chất của đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ được SGK kết luận như sau ([17], trang 56):

"Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ là một parabol có đỉnh $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$, nhận đường thẳng $x = \frac{-b}{2a}$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên nếu a > 0, xuống dưới nếu a < 0."

Từ phép tịnh tiến, người ta cũng thu được kết quả về tính chất biến thiên của hàm số bậc hai như sau ([17], trang 57):

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Để thấy được phép tịnh tiến đồ thị có ứng dụng như thế nào trong nghiên cứu đồ thị hàm số trong phần bài tập, chúng tôi tiến hành phân tích các tổ chức toán học liên quan đến phép biến đổi đồ thị.

c. Tổ chức toán học

❖ **Kiểu nhiệm vụ T_4:** Xác định biểu thức đại số của hàm số có đồ thị là ảnh của đồ thị hàm số cho trước qua phép tịnh tiến.

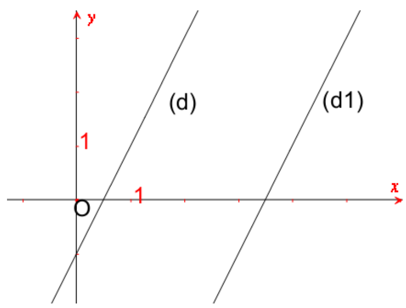
Kiểu nhiệm vụ T_4 xuất hiện trong bài 1: *Đại cương về hàm số* và bài 2: *Hàm số bậc nhất* của chương 2: *Hàm số bậc nhất và hàm số bậc hai*.

Có 12 câu hỏi ứng với kiểu nhiệm vụ T_4 trên tổng số 110 câu hỏi của chương 1. Trong đó, có 9 câu hỏi trên tổng số 48 câu của bài 1 và 3 câu trên tổng số 18 câu của bài 2.

Sau đây là một ví dụ về một bài tập thuộc T_4 ([17], trang 43):

"Ví dụ 6: Nếu tịnh tiến đường thẳng $(d): y = 2x - 1$ sang phải 3 đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số nào?

Giải. Kí hiệu $f(x) = 2x - 1$. Theo định lý trên, khi tịnh tiến (d) sang phải 3 đơn vị, ta được (d_1), đó là đồ thị của hàm số $y = f(x-3) = 2(x-3) - 1$, tức là hàm số $y = 2x - 7$ (h.2.7)"



Hình 2.7

Lời giải trên cho phép chúng ta rút ra kĩ thuật τ_4 của kiểu nhiệm vụ T_4 như sau:

Kĩ thuật τ_4:

- Xác định vectơ $p\vec{i} + q\vec{j}$ của phép tịnh tiến biến G_f thành G_h.
- G_h là đồ thị của hàm số $h(x) = f(x-p) + q$.

Nhận xét:

Số lượng câu hỏi thuộc kiểu nhiệm vụ T_4 tương đối nhiều (chiếm trên 10% tổng số câu hỏi của chương) cho thấy đây là một kiểu nhiệm vụ được thể chế xem trọng.

Các câu hỏi thuộc kiểu nhiệm T_4 liên quan đến các loại hàm số như: Hàm số bậc nhất, hàm số bậc hai, hàm số hữu tỷ và hàm số trị tuyệt đối của các loại hàm số trên.

Kiểu nhiệm vụ T_4 thể hiện mối liên hệ giữa việc biến đổi hình học từ G_f sang G_h với việc biến đổi đại số từ hàm số *f* sang hàm số *h*. Cụ thể, người ta cho đồ thị G_f của hàm số $y = f(x)$ ($f(x)$ đã biết) và đồ thị G_h của hàm số $y = h(x)$ ($h(x)$ chưa biết). Trong đó, G_h có được bằng cách tịnh tiến G_f theo một vectơ nào đó.

Mối liên hệ giữa hai đồ thị hàm số có thể được thể hiện qua hai cách.

- Cách thứ nhất: Đồ thị hàm số G_f và G_h được cho dưới dạng ngầm ẩn bằng cách mô tả phép tịnh tiến biến G_f thành G_h. Trong trường hợp này, người ta không cần vẽ đồ thị của hai hàm số. Khi đó, vì đồ thị của hàm số *h* là ảnh của đồ thị hàm số *f* qua phép tịnh tiến nên tính chất của hàm số *f* và hàm số *h* là tương tự nhau. Câu hỏi đặt ra là:

Học sinh có vận dụng được các tính chất của hàm số ban đầu để suy ra tính chất của hàm số mới hay không?

- Cách thứ hai: Đồ thị của hai hàm số *f* và *h* được vẽ trước. Khi đó, học sinh cần dựa vào hình vẽ để rút ra mối liên hệ giữa hai đồ thị. Từ đó sử dụng công thức của phép tịnh tiến để xác định biểu thức đại số của hàm số *h* từ biểu thức đại số của hàm số *f*. Cách này cho thấy rõ ràng mối liên hệ hình học giữa hai đồ thị hàm số bằng hình vẽ, tuy nhiên, SGK không có bài tập nào được cho dưới dạng này. Điều này lý giải cho kết qua của bài toán thực nghiệm 1 của chúng tôi trong khóa luận tốt nghiệp: "*tiếp cận khái niệm hàm số với Casyopee*" thực hiện năm 2010[1].

❖ **Kiểu nhiệm vụ T_5:** Xác định phép tịnh tiến biến đồ thị hàm số này thành đồ thị hàm số kia.

Kiểu nhiệm vụ T_5 xuất hiện trong chương 2 và có mặt ở tất cả các bài học của chương này với số lượng bài tập là 7 câu trên tổng số 110 câu hỏi của chương.

Chúng ta có thể hình dung nội dung của các bài tập thuộc T_5 thông qua ví dụ 7, trang 44, SGK đại số 10 – nâng cao:

> "Ví dụ 7: Cho đồ thị (H) của hàm số $y = \frac{1}{x}$. Hỏi muốn có đồ thị của hàm số $y = \frac{-2x+1}{x}$ thì ta phải tịnh tiến (H) như thế nào?

---

[1] Xem phần mở đầu của luận văn này

Giải. Kí hiệu $g(x)=\frac{1}{x}$, ta có $\frac{-2x+1}{x}=-2+\frac{1}{x}=g(x)-2$. Vậy muốn có đồ thị hàm số $y=\frac{-2x+1}{x}$, ta phải tịnh tiến (H) xuống dưới 2 đơn vị."

Lời giải trên cho phép rút ra kĩ thuật $\tau_{5.1}$ như sau:

Kĩ thuật $\tau_{5.1}$:

- Viết $h(x)$ dưới dạng $h(x)=f(x-p)+q$
- Phép tịnh tiến theo vectơ $p\vec{i}+q\vec{j}$ biến đồ thị hàm số f thành đồ thị hàm số h.

Chúng ta xét thêm một ví dụ nữa về kiểu nhiệm vụ này ([17], trang 53):

"Vẽ đồ thị của hai hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ và nêu nhận xét về quan hệ giữa chúng

a) $y=|x-2|$ b) $y=|x|-3$ "

Đối với bài tập có nội dung như trên, chúng ta có kĩ thuật $\tau_{5.2}$ như sau.

Kĩ thuật $\tau_{5.2}$:

- Vẽ hai đồ thị của hai hàm số *f* và *h* trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Từ đồ thị rút ra phép tịnh tiến biến G_f thành G_h.

Nhận xét:

Với các bài tập được giải bằng phương pháp đại số (kĩ thuật $\tau_{5.1}$), các loại hàm số được đề cập đến là: Hàm số hữu tỷ, hàm số bậc nhất, hàm số bậc hai và hàm số trị tuyệt đối của các hàm số trên.

Kĩ thuật $\tau_{5.1}$ thể hiện mối liên hệ giữa việc biến đổi đại số từ *f* đến *h* với việc biến đổi hình học từ đồ thị của hàm số *f* đến đồ thị hàm số *h*. Cụ thể hơn, người ta cho hai hàm số *f* và *h* mà biểu thức đại số của chúng có mối liên hệ nào đó. Từ đó, học sinh cần xác định được mối liên hệ hình học giữa hai đồ thị (không cần vẽ hai đồ thị), mối liên hệ hình học trong kiểu nhiệm vụ này là phép tịnh tiến biến đồ thị hàm số này thành đồ thị hàm số kia.

Như vậy, ý nghĩa của việc xác định được phép tịnh tiến biến đồ thị hàm số này thành đồ thị hàm số kia là gì?

Kiểu nhiệm vụ T_6 sau đây sẽ cho thấy ý nghĩa của việc làm này.

❖ **Kiểu nhiệm vụ T_6:** Mô tả đồ thị hàm số bậc hai.

Kiểu nhiệm vụ này xuất hiện trong bài 3: *Hàm số bậc hai* của chương 2 với số bài tập là 10 câu trên tổng số 110 câu của chương này.

Chúng ta hãy xét bài tập trong SGK liên quan đến kiểu nhiệm vụ T_6 ([17], trang 58):

> "Cho các hàm số:
>
> a. $y = -x^2 - 3$ b. $y = (x-2)^2$
>
> c. $y = \sqrt{2}x^2 + 1$ d. $y = -\sqrt{2}(x+1)^2$
>
> Không vẽ đồ thị, hãy mô tả đồ thị của mỗi hàm số trên bằng cách điền vào chỗ trống (…) theo mẫu:
>
> - Đỉnh của parbol là điểm có tọa độ …
> - Parabol có trục đối xứng là đường thẳng …
> - Parabol có bề lõm hướng (lên trên/ xuống dưới)… "

Sau đây là lời giải từ SGV ([21], trang 85):

> "c) parabol $y = \sqrt{2}x^2 + 1$ có được là do tịnh tiến parabol $y = \sqrt{2}x^2$ theo trục tung lên trên 1 đơn vị. Do đó:
>
> - Đỉnh của parabol là điểm có tọa độ (0; 1);
> - Parabol có trục đối xứng là đường thẳng $x = 0$;
> - Parabol có bề lõm hướng lên trên. "

Lời giải từ SGV cho phép nêu ra kĩ thuật $\tau_{6.1}$ cho kiểu nhiệm vụ T_6 như sau.

Kĩ thuật $\tau_{6.1}$:

- Biểu diễn hàm số bậc hai về dạng $y = a(x-p)^2 + q$;
- Xác định phép tịnh tiến biến đồ thị hàm số $y = ax^2$ thành đồ thị hàm số $y = a(x-p)^2 + q$
- Tịnh tiến gốc tọa độ và đường thẳng $x = 0$ theo vectơ $p\vec{i} + q\vec{j}$ ta được tọa độ đỉnh, phương trình trục đối xứng và bề lõm.

Ngoài kĩ thuật $\tau_{6.1}$, kiểu nhiệm vụ T_6 còn có thể được giải bằng một kĩ thuật khác như sau.

Kĩ thuật $\tau_{6.2}$:

- Đưa hàm số bậc hai về dạng $y = ax^2 + bx + c$

- Đỉnh của parabol là $I\left(\frac{-b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}\right)$, trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{-b}{2a}$, bề lõm hướng lên trên khi $a > 0$ và bề lõm hướng xuống dưới khi $a < 0$.

Kĩ thuật $\tau_{6.2}$ dựa trên kết luận của SGK về đồ thị hàm số bậc hai ([17],trang 57):

"Kết luận

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ là một parabol có đỉnh là $I\left(\frac{-b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}\right)$, nhận đường thẳng $x = \frac{-b}{2a}$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$, xuống dưới khi $a < 0$."

Nhận xét:

Có 2 dạng hàm số bậc hai được đề cập đến trong SGK thuộc kiểu nhiệm vụ T_6 là:

- Dạng 1: $y = a(x-p)^2 + q$ (có 4 câu được cho dưới dạng này)

- Dạng 2: $y = ax^2 + bx + c$ (có 5 câu được cho dưới dạng này).

Cả hai kĩ thuật được đưa ra trong phần trên đều áp dụng được đối với cả hai dạng hàm số bậc hai nêu trên. Tuy nhiên, từ lời giải SGV, chúng tôi nhận thấy, đối với những hàm số có dạng 1 thì phép tịnh tiến được ưu tiên sử dụng, đối với những hàm số có dạng 2 thì công thức trong phần nhận xét được ưu tiên áp dụng.

Việc mô tả đồ thị hàm số bậc hai nhờ phép tịnh tiến thể hiện một cách ngầm ẩn việc dựng đồ thị hàm số $y = a(x-p)^2 + q$ từ đồ thị hàm số $y = ax^2$ (xem như đã biết đồ thị hàm số này).

Ngoài kiểu nhiệm vụ T_6, việc mô tả đồ thị hàm số bậc hai còn xuất hiện trong kiểu nhiệm vụ sau đây.

❖ **Kiểu nhiệm vụ T_7**: Vẽ đồ thị hàm số bậc hai.

Kiểu nhiệm vụ này xuất hiện trong bài 3: Hàm số bậc hai với 8 câu hỏi trên tổng số 110 câu hỏi của cả chương và trên tổng số 32 câu hỏi của bài 2.

Sau đây là một ví dụ về một bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ này ([17], trang 57):

"Áp dụng kết quả trên, hãy cho biết sự biến thiên của hàm số

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

Vẽ đồ thị của hàm số đó.

Giải. Ta tính được $\frac{-b}{2a} = 2$ và $\frac{-\Delta}{4a} = 1$.

Vậy đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$ là parabol có đỉnh $I(2;1)$, nhận đường thẳng $x = 2$ là trục đối xứng và hướng bề lõm xuống dưới.

Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$, nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

(…)"

Lời giải trên cho thấy việc mô tả đồ thị hàm số bậc hai được tiến hành trước khi vẽ đồ thị của nó.

Nhận xét:

Tất cả các bài tập về vẽ đồ thị hàm số bậc hai đều là các hàm số bậc hai có dạng $y = ax^2 + bx + c$ và từ lời giải của SGV chúng tôi nhận thấy việc mô tả đồ thị hàm số bậc hai đều dựa vào việc tính toán các giá trị $\frac{-b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}$. Việc giải nhiều bài tập (khoảng 25% câu hỏi trong bài 3) bằng cách làm trên sẽ ảnh hưởng gì đến quan niệm của học sinh về phép tịnh tiến đồ thị? Cụ thể:

Học sinh có vận dụng phép tịnh tiến trong việc mô tả đồ thị hàm số bậc hai dạng $y = a(x-p)^2 + q$ hay không? Từ đó, phép tịnh tiến đồ thị có được học sinh sử dụng trong việc vẽ đồ thị hàm số $y = a(x-p)^2 + q$ khi đã có đồ thị $y = ax^2$ hay không?

Để thấy được phép biến đổi đồ thị được ứng dụng như thế nào trong các loại hàm số khác, chúng tôi tiến hành phân tích SGK lớp 11.

1.3.2. Phân tích SGK Toán lớp 11

Như đã phân tích, chương trình đại số và giải tích 11 đề cập đến đồ thị các hàm số lượng giác $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$.

Trong phần này, chúng tôi chỉ phân tích chi tiết cách thức trình bày đồ thị hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ trong SGK. Đồ thị của hàm số $y = \tan x, y = \cot x$ được trình

bày tương tự với đồ thị hai hàm số trên nên chúng tôi không phân tích ở trong luận văn này.

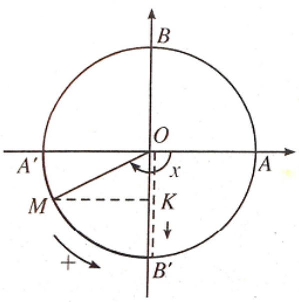
Để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$ và đồ thị hàm số $y = \cos x$, trước hết SGK nói về tính tuần hoàn của hai hàm số này. Nhờ tính tuần hoàn với chu kì 2π nên việc khảo sát hàm số $y = \sin x$ chỉ cần thực hiện trên một đoạn có độ dài 2π. Sự biến thiên của hàm số $y = \sin x$ được rút ra bằng cách quan sát sự di chuyển của các điểm tương ứng trên đường tròn lượng giác. Điều này giúp học sinh dễ dàng hình dung được sự biến thiên của hàm số lượng giác một cách trực quan hơn. Sau đây là đoạn trích trong SGK ([18], trang 5 - 6):

"Do hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên một đoạn có độ dài 2π, chẳng hạn $[-\pi;\pi]$.

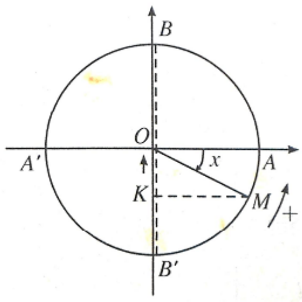
Chiều biến thiên (xem các hình 1.2, 1.3, 1.4)

Cho $x = (OA, OM)$ tăng từ $-\pi$ đến π, tức là cho M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương một vòng xuất phát từ *A'* và quan sát sự thay đổi của điểm K (K là hình chiếu của M trên trục sin, $\overline{OK} = \sin x$), ta thấy:

- Khi x tăng từ $-\pi$ đến $\frac{-\pi}{2}$ thì điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ *A'* đến *B'* và điểm K chạy dọc trục sin từ O đến *B'*. Do đó $\overline{OK}$, tức là sin*x*, giảm từ 0 đến – 1 (h.1.2).

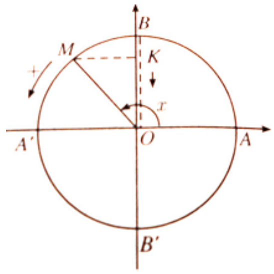


Hình 1.2



Hình 1.3

- Khi x tăng từ $\frac{-\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$ thì điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ *B'* đến B và điểm K chạy dọc trục sin từ *B'* đến B. Do đó $\overline{OK}$, tức là sin*x*, tăng từ -1 đến 1 (h.1.3).



Hình 1.4

- Khi x tăng từ $\frac{\pi}{2}$ đến π thì điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ B đến A' và điểm K chạy dọc trục sin từ B đến O. Do đó $\overline{OK}$, tức là sin$x$ giảm từ 1 đến 0 (h.1.4).

Vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$ như sau:

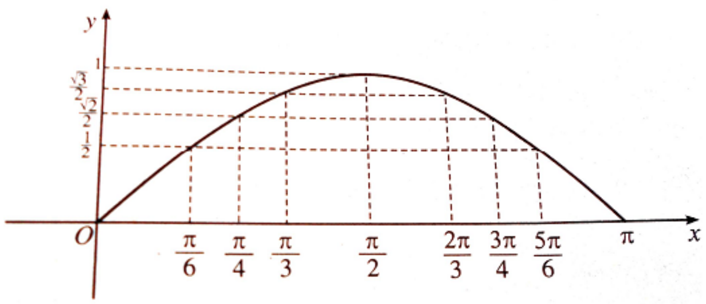
x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y = sin x	0	↘	- 1	↗	0	↗	1	↘	0

Đồ thị của hàm số $y=\sin x$ được thể hiện trong SGK như sau ([18], trang 6 – 7):

"- Khi vẽ đồ thị của hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$, ta nên để ý rằng: Hàm số $y=\sin x$ là một hàm số lẻ, do đó đồ thị của nó nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Vì vậy, đầu tiên ta vẽ đồ thị của hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $\left[0;\pi\right]$.

Trên đoạn $\left[0;\pi\right]$, đồ thị của hàm số $y=\sin x$ (h. 1.5) đi qua các điểm có tọa độ (x,y) trong bảng sau:

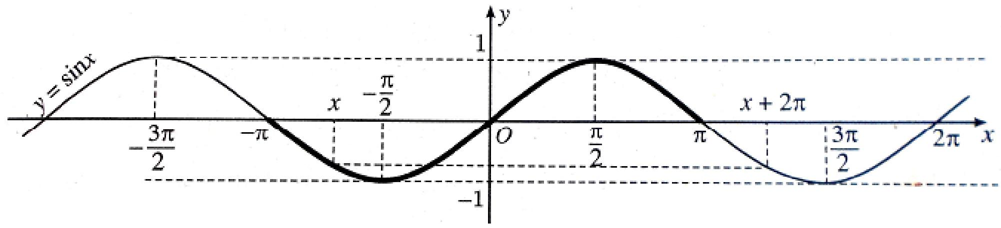
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y = sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Hình 1.5

Phần đồ thị của hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $\left[0;\pi\right]$ cùng với hình đối xứng của nó qua gốc O lập thành đồ thị của hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$ (h.1.6).

- Tịnh tiến phần đồ thị vừa vẽ sang trái, sang phải những đoạn có độ dài $2\pi, 4\pi, 6\pi$ ….thì được toàn bộ đồ thị hàm số $y=\sin x$. Đồ thị đó được gọi là một *đường hình sin* (h. 1.6)."



Hình 1.6

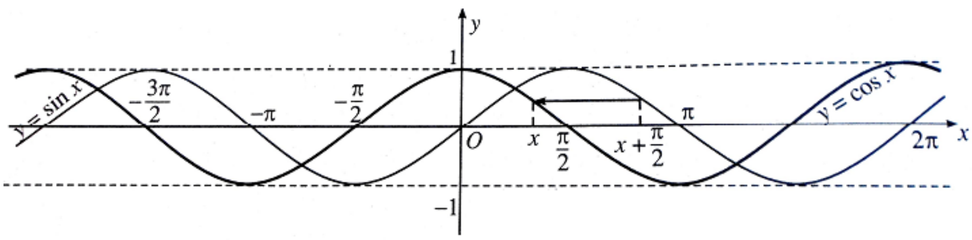
Đoạn trích trên cho thấy việc vận dụng tính chẵn – lẻ và tính tuần hoàn của hàm số giúp đơn giản hóa việc vẽ đồ thị hàm số $y = \sin x$. Đồng thời, hai tính chất trên cũng cho phép ta nhận dạng được đồ thị hàm số $y = \sin x$. Đó là các tính chất:

- Đồ thị hàm số $y = \sin x$ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

- Hình dạng của đồ thị hàm số $y = \sin x$ giống nhau trên những đoạn có độ dài 2π liên tiếp nhau.

Tiếp theo đồ thị hàm số $y = \sin x$, SGK trình bày việc vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$. Tư tưởng của việc khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$ là dựa vào các tính chất và đồ thị hàm số $y = \sin x$ đã nghiên cứu trước đó. Cụ thể, SGK trình bày việc khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$ như sau ([18], trang 8):

"Ta có thể tiến hành khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \cos x$ tương tự như đã làm với hàm số $y = \sin x$ trên đây. Tuy nhiên, ta nhận thấy $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ với mọi *x*, nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ sang trái một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$, ta được đồ thị hàm số $y = \cos x$ (nó cũng được gọi là một *đường hình sin*) (h.1.7)."



Hình 1.7

Tính chất của hàm số $y = \cos x$ được suy ra từ đồ thị của nó như sau ([18], trang 8):

"Căn cứ vào đồ thị của hàm số $y = \cos x$, ta lập được bảng biến thiên của hàm số đó trên đoạn $[-\pi; \pi]$:

x	$-\pi$		0		π
$y = \cos x$	- 1	↗	1	↘	- 1 ”

Nhận xét:

- Việc vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ giúp giải thích lí do vì sao lại gọi đồ thị hàm số $y = \cos x$ là *đường hình sin*. Như vậy, phép tịnh tiến đồ thị trong trường hợp này còn đóng vai trò nhận dạng đồ thị hàm số.
- Với việc vận dụng phép tịnh tiến đồ thị, người ta thu được đồ thị hàm số $y = \cos x$ từ đồ thị hàm số $y = \sin x$. Do đó, mọi tính chất của hàm số $y = \cos x$ đều có thể suy ra từ hàm số $y = \sin x$. Hơn nữa, cách khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$ của SGK một lần nữa cho thấy thể chế mong muốn sử dụng phép biến hình trong việc vẽ đồ thị hàm số.

Để thấy được thể chế có quan tâm đến việc sử dụng phép biến đổi đồ thị trong việc vẽ đồ thị hàm số hay không, chúng ta tiến hành phân tích các tổ chức toán học.

❖ **Tổ chức toán học**

Trong phần này, chúng tôi quan tâm đến kiểu nhiệm vụ T_8 sau đây.

Kiểu nhiệm vụ T_8: Vẽ đồ thị hàm số lượng giác.

Có 12 câu tương ứng với kiểu nhiệm vụ T_8 trên tổng số 29 câu hỏi của bài hàm số lượng giác và trên tổng số 166 câu hỏi của chương 1: *Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác*.

Chúng ta xét ví dụ sau đây về kiểu nhiệm vụ này ([18], trang 15):

> “6. Cho hàm số $y = f(x) = 2\sin 2x$
>
> a. Chứng minh rằng với số nguyên k tùy ý, luôn có $f(x + k\pi) = f(x)$ với mọi x.
>
> b. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = 2\sin 2x$ trên đoạn $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
>
> c. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2\sin 2x$.”

Lời giải từ SGV cho thấy việc vẽ đồ thị hàm số lượng giác được dựa trên tính tuần hoàn cũng như tính chẵn – lẻ của nó. Điều này đã được làm rõ trong phần phân tích lý thuyết. Cụ thể ta có kĩ thuật $\tau_{8.1}$ như sau:

Kĩ thuật $\tau_{8.1}$:

- Xác định chu kì T của hàm số;
- Khảo sát sự biến thiên của hàm số trên đoạn K có độ dài bằng T;
- Vẽ đồ thị trên K bằng cách nối các điểm đặc biệt lại với nhau;
- Tịnh tiến phần đồ thị vẽ được trên K sang phải, sang trái những đoạn có độ dài kT (k là số nguyên).

Chúng ta phân tích thêm một số bài tập trong phần này.

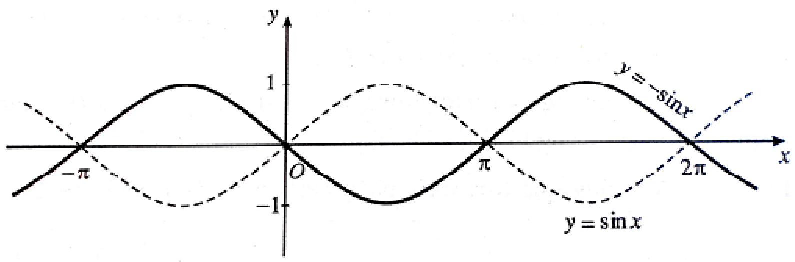
Sau đây là một ví dụ khác trong SGK ([18], trang 17):

"11. Từ đồ thị hàm số $y = \sin x$, hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau và vẽ đồ thị của các hàm số đó.

a. $y = -\sin x$ b. $y = |\sin x|$ c. $y = \sin|x|$"

Sau đây là lời giải từ SGV ([22], trang 27 – 28):

"a. Đồ thị của hàm số $y = -\sin x$ là hình đối xứng qua trục hoành của đồ thị hàm số $y = \sin x$. (h.1.3)



"

Hình 1.3

Đây là ví dụ cho thấy việc sử dụng phép đối xứng qua trục hoành trong việc vẽ đồ thị hàm số.

"Do $|\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{khi } \sin x \geq 0 \\ -\sin x & \text{khi } \sin x < 0 \end{cases}$

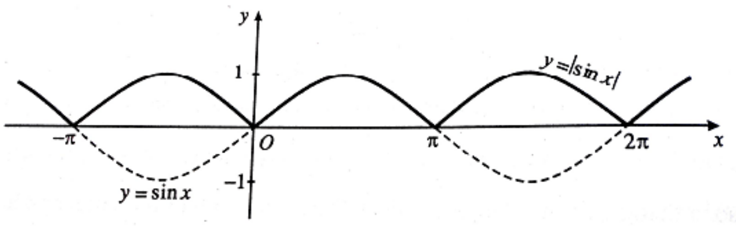
Nên đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$ có được từ đồ thị (C) của hàm số $y = \sin x$ bằng cách:

- Giữ nguyên phần của đồ thị (C) nằm trong nửa mặt phẳng $y \geq 0$ (tức là nửa mặt phẳng bên trên trục hoành kể cả bờ *Ox*);

- Lấy đối xứng qua trục hoành phần của đồ thị (C) nằm trong nửa mặt phẳng $y < 0$ (tức là nửa mặt phẳng bên dưới trục hoành không kể bờ *Ox*);

- Xóa phần của đồ thị (C) nằm trong nửa mặt phẳng $y < 0$.

- Đồ thị $y = |\sin x|$ là đường liền nét trong hình 1.4.



"

Hình 1.4

([22], trang 28)

"c. Do $\sin|x| = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \geq 0 \\ \sin(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

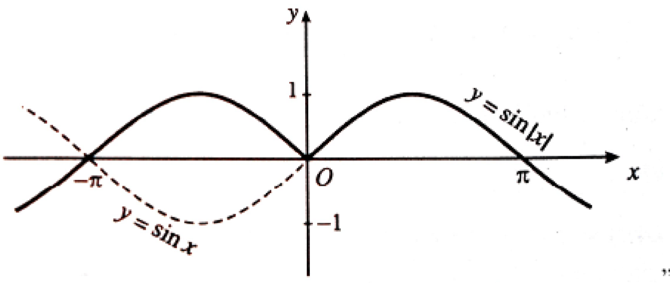
Nên đồ thị của hàm số $y = \sin|x|$ có được từ đồ thị (C) của hàm số bằng cách:

- Giữ nguyên phần của đồ thị (C) nằm trong nửa mặt phẳng $x \geq 0$ (tức là nửa mặt phẳng bên phải trục tung kể cả bờ *Oy*);

- Xóa phần của đồ thị (C) nằm trong nửa mặt phẳng $x < 0$ (tức là nửa mặt phẳng bên trái trục tung không kể bờ *Oy*);

- Lấy đối xứng qua trục tung phần của đồ thị (C) nằm trong nửa mặt phẳng $x > 0$;

- Đồ thị $y = |\sin x|$ là đường liền nét trong hình 1.5.



"

Hình 1.5

([22], trang 28 - 29)

Cách vẽ đồ thị của hai hàm số $y = |\sin x|$ và $y = \sin|x|$ từ đồ thị hàm số $y = \sin x$ có thể vận dụng trong trường hợp tổng quát hơn. Nghĩa là từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và $y = f(|x|)$. Phép biến hình được sử dụng trong trường hợp này lần lượt là phép đối xứng qua trục hoành và phép đối xứng qua trục tung.

Chúng ta xét một ví dụ tiếp theo ([18], trang 17):

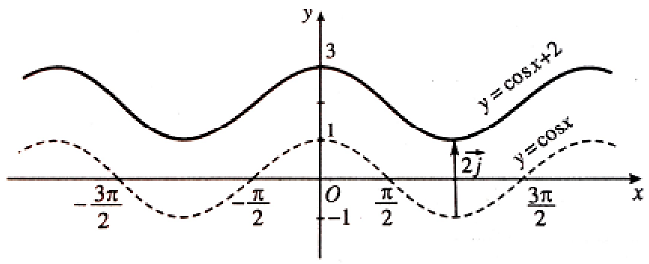
“12. a) Từ đồ thị hàm số $y = \cos x$, hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau và vẽ đồ thị của các hàm số đó:

$y = \cos x + 2$ $\qquad\qquad$ $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

b) Hỏi mỗi hàm số đó có phải là hàm số tuần hoàn không? ”

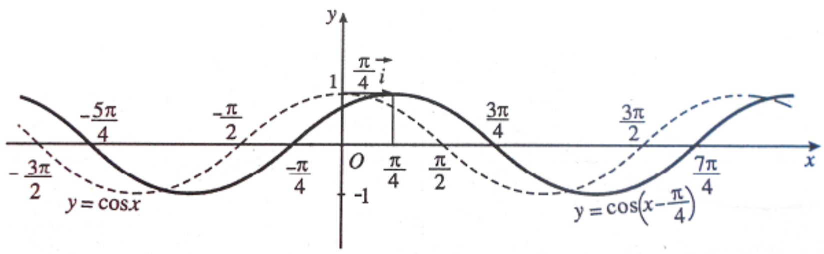
Sau đây lời giải từ SGV ([22], trang 29):

“12. a) Đồ thị của hàm số $y = \cos x + 2$ có được là do tịnh tiến đồ thị của hàm số $y = \cos x$ lên trên một đoạn có độ dài bằng 2, tức là tịnh tiến theo vectơ $2\vec{j}$ ($\vec{j}$ là vectơ đơn vị trên trục tung) (h. 1.6).



Hình 1.6

Đồ thị của hàm số $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ có được do tịnh tiến đồ thị của hàm số $y = \cos x$ sang phải một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{4}$, tức là tịnh tiến theo vectơ $\frac{\pi}{4}\vec{i}$ ($\vec{i}$ là vectơ đơn vị trên trục hoành) (h. 1.7).



”

Hình 1.7

Trong trường hợp này, phép biến đổi đồ thị được sử dụng là phép tịnh tiến đồ thị. Hơn nữa, phép tịnh tiến đồ thị cũng cho phép ta kết luận được tính tuần hoàn của hàm số $y = \cos x + 2$ và $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ từ tính tuần hoàn của hàm số $y = \cos x$.

Chúng ta xét thêm ví dụ cuối cùng ([18], trang 17):

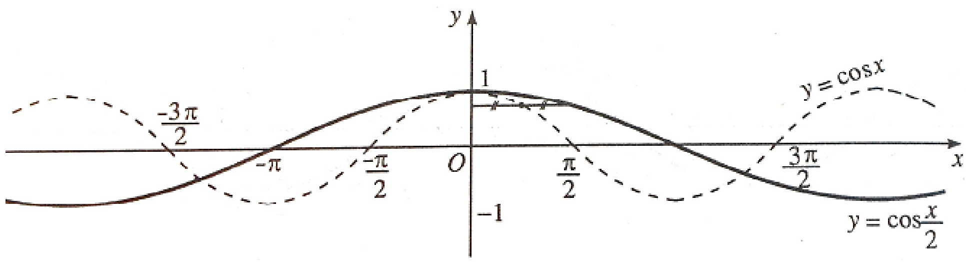
“13. Xét hàm số $y = f(x) = \cos\frac{x}{2}$.

(…)

d) Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, xét phép biến hình F biến mỗi điểm (*x*,*y*) thành điểm (*x'*,*y'*) sao cho *x'* = 2*x* và *y'* = *y*. Chứng minh rằng F biến đồ thị của hàm số $y = \cos x$ thành đồ thị của hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$. "

Kết quả câu d) cho phép rút ra phương pháp vẽ đồ thị hàm số bằng phép co dãn. Trong trường hợp này là co dãn theo phương trục hoành. Phương pháp đó được thể hiện trong SGV như sau ([22], trang 30):

"Nếu đặt *x'* = 2*x*; *y'* = *y* thì $y = \cos x$ khi và chỉ khi $y' = \cos\frac{x'}{2}$. Do đó, phép biến đổi xác định bởi $(x;y) \mapsto (x';y')$ sao cho *x'* = 2*x*; *y'* = *y* biến đồ thị hàm số $y = \cos x$ thành đồ thị hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$ (h. 1.9)



"

Hình 1.9

Từ 3 ví dụ trên, chúng ta rút ra được kĩ thuật $\tau_{8.2}$ của như sau.

Kĩ thuật $\tau_{8.2}$:

- Xác định mối liên hệ giữa hai biểu thức đại số của hai hàm số *f* và *h*.
- Từ mối liên hệ giữa hai biểu thức đại số, rút ra mối liên hệ giữa hai đồ thị tương ứng.
- Biến đổi đồ thị G_f thành G_h.

Nhận xét:

Với việc đưa vào kiểu nhiệm vụ T_8, ta thấy việc vẽ đồ thị hàm số bằng phép biến đổi đồ thị được thể hiện một cách tường minh trong SGK. Tuy nhiên, với số lượng bài tập quá ít (6 câu trên tổng số 166 câu của chương), đồng thời việc vẽ đồ thị hàm số lượng giác không phải là vấn đề trọng tâm của chương (chỉ có 12 câu về vẽ đồ thị trên tổng số 166 câu của chương) nên học sinh sẽ khó thấy được sự cần thiết của

việc sử dụng phép biến đổi đồ thị trong việc vẽ đồ thị hàm số thông qua việc vẽ đồ thị các hàm số lượng giác như trên.

1.3.3. Phân tích SGK Toán lớp 12

1.3.3.1. Phép tịnh tiến hệ trục tọa độ trong SGK Giải tích 12

Để nghiên cứu đồ thị hàm số bằng phép tịnh tiến hệ trục tọa độ, SGK quan niệm đồ thị hàm số là đường cong

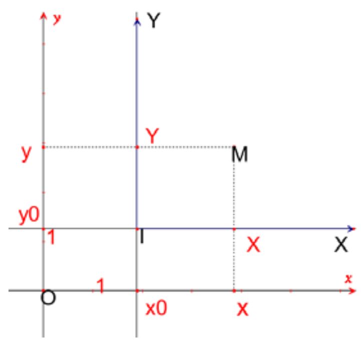
"Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $(x\,;\,f(x))$, x thuộc D của mặt phẳng tọa độ.

Người ta còn gọi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là đường cong có phương trình là $y = f(x)$ (gọi tắt là đường cong $y = f(x)$)."([19], trang 24)

Để xác định được mối liên hệ giữa hai phương trình của một đường cong trong hai hệ tọa độ khác nhau, trước hết cần thiết lập mối liên hệ giữa tọa độ của một điểm trong hai hệ tọa độ.

"Giả sử I là một điểm của mặt phẳng và $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm I đối với hệ tọa độ Oxy. Gọi IXY là hệ tọa độ mới có gốc là điểm I và hai trục IX, IY theo thứ tự có cùng các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}$ với hai trục Ox, Oy (h.1.5).

Giả sử M là một điểm bất kì của mặt phẳng. Gọi $(x;y)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ Oxy và $(X; Y)$ đối với hệ tọa độ IXY. Khi đó



Hình 1.5

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$$

Hay

$$x\vec{i} + y\vec{j} = \left(x_0\vec{i} + y_0\vec{j}\right) + \left(X\vec{i} + Y\vec{j}\right) = (X + x_0)\vec{i} + (Y + y_0)\vec{j}$$

Do đó

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

Các hệ thức trên gọi là *công thức chuyển hệ tọa độ* trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$." ([19], trang 25)

Từ mối liên hệ giữa tọa độ của một điểm trong hai hệ tọa độ (hay còn gọi là công thức chuyển hệ tọa độ), SGK thiết lập mối liên hệ giữa phương trình của đường cong trong hai hệ tọa độ như sau ([19], trang 25 - 26):

"Giả sử (G) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đối với hệ tọa độ *Oxy* đã cho. Khi đó phương trình của (G) đối với hệ tọa độ *Oxy* là $y = f(x)$. Ta sẽ viết phương trình của (G) đối với hệ tọa độ mới *IXY*. Giả sử *M* là một điểm bất kì của mặt phẳng, $(x; y)$ và $(X; Y)$ là tọa độ của điểm *M*, theo thứ tự, đối với hệ tọa độ *Oxy* và *IXY*. Khi đó,

$$M \in (G) \Leftrightarrow y = f(x)$$

Áp dụng công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$, ta có

$$M \in (G) \Leftrightarrow Y + y_0 = f(X + x_0) \Leftrightarrow Y = f(X + x_0) - y_0$$

Vậy phương trình của đường cong (G) đối với hệ tọa độ *IXY* là

$$Y = f(X + x_0) - y_0\text{"}$$

Qua đoạn trích trên, ta thấy đường cong (G) cố định, khi hệ tọa độ thay đổi thì phương trình của đường cong (G) cũng thay đổi. Như vậy, một đường cong có thể là đường biểu diễn đồ thị của nhiều hàm số khác nhau trong các hệ tọa độ tương ứng. Công thức chuyển hệ tọa độ cho phép ta tìm ra mối liên hệ giữa hai phương trình của cùng một đường cong trong hai hệ tọa độ khác nhau.

Xét về mặt tri thức khoa học, công thức chuyển hệ tọa độ trong SGK thực chất là một trường hợp riêng của công thức đổi mục tiêu. Rõ ràng, với một đường cong cố định, khi thay đổi mục tiêu, nó có thể đóng vai trò là đường biểu diễn đồ thị của nhiều hàm số tương ứng với mục tiêu được thay đổi.

Sau đây, chúng ta quan tâm đến việc ứng dụng phép tịnh tiến hệ tọa độ trong nghiên cứu hàm số thông qua các kiểu nhiệm vụ trong SGK.

Phân tích bài tập trong SGK, chúng tôi nhận thấy có hai kiểu nhiệm vụ liên quan đến phép tịnh tiến hệ tọa độ.

Kiểu nhiệm vụ T_9: Viết phương trình đường cong trong hệ tọa độ mới

Kiểu nhiệm vụ T_9 xuất hiện trong chương 1 với 12 câu trên tổng số 224 câu hỏi của chương này.

Chúng ta có thể hình dung các yêu cầu của kiểu nhiệm vụ này thông qua ví dụ sau ([19], trang 26):

"Ví dụ. Cho đường cong (C) có phương trình là

$$y = \frac{1}{2}(x-2)^3 - 1$$

Và điểm $I(2;-1)$.

a) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và phương trình của (C) đối với hệ tọa độ *IXY*.

(…)

Giải. Công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y - 1 \end{cases}$$

Phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ *IXY* là

$$Y - 1 = X^3 - 1 \text{ hay } Y = \frac{1}{2}X^3.$$"

Lời giải trên cho phép rút ra kĩ thuật τ_9 của kiểu nhiệm vụ T_9 như sau.

Kĩ thuật τ_9:

- Xác định công thức chuyển hệ tọa độ,
- Thay biểu thức thu được vào phương trình của đường cong ta được phương trình trong hệ tọa độ mới.

Nhận xét:

Kiểu nhiệm vụ T_9 giúp học sinh củng cố kiến thức về công thức chuyển hệ tọa độ, đồng thời thể hiện mối liên hệ giữa hai phương trình của đường cong trong hệ tọa độ mới và hệ tọa độ cũ.

Kiểu nhiệm vụ T_9 đóng vai trò là yếu tố kĩ thuật của kiểu nhiệm vụ T_{10} sau đây.

Kiểu nhiệm vụ T_{10}: Xác định tâm đối xứng của đồ thị hàm số

Có 13 câu trên tổng số 224 câu của chương 1 ứng với kiểu nhiệm vụ T_{10}.

Ví dụ sau đây sẽ giúp chúng ta hình dung về kiểu nhiệm vụ này ([19], trang 26):

"ví dụ. Cho đường cong (C) có phương trình là

$$y = \frac{1}{2}(x-2)^3 - 1$$

Và điểm $I(2;-1)$.

(…)

b) Từ đó suy ra rằng *I* là tâm đối xứng của đường cong (C).

Giải. (…)

b) Vì $Y = \frac{1}{2}X^3$ là một hàm số lẻ nên đồ thị (C) của nó nhận gốc tọa độ *I* làm tâm đối xứng.”

Từ lời giải trên, chúng ta rút ra kĩ thuật của kiểu nhiệm vụ trên

Kĩ thuật τ_{10}:

- Lập phương trình của đường cong trong hệ tọa độ *IXY*.
- Dựa vào tính chẵn – lẻ của hàm số mới để kết luận về tâm đối xứng cũng như trục đối xứng của đồ thị

Như vậy, mặc dù hai hàm số là khác nhau nhưng chúng có cùng đường biểu diễn đồ thị nên có thể dựa vào tính chất của hàm số mới để suy ra tính chất của đồ thị hàm số ban đầu. Trong trường hợp này, ứng dụng của phép tịnh tiến hệ tọa độ cho phép ta nhận dạng đồ thị hàm số (tính đối xứng), từ đó xác định được tâm đối xứng của đồ thị.

Cách làm trên cũng có thể dùng để xác định trục đối xứng (nếu có) của một đồ thị hàm số.

Nhận xét khác:

Ta có thể ứng dụng kiểu nhiệm vụ lập phương trình đường cong trong hệ tọa độ mới trong việc vẽ đồ thị hàm số như sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là (C’) (xem như là hai đường cong (C) và (C’)), biết rằng $g(x) = f(x-p)+q$.

Tịnh tiến hệ tọa độ Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ với $I(p;q)$ ta được hệ trục tọa độ mới là IXY. Trong hệ trục tọa độ mới này, phương trình của đường cong (C’) chính là $Y = f(X)$. Do đó, đường cong (C’) trong hệ tọa độ IXY chính là đường cong (C) trong hệ tọa độ Oxy. Tới đây, có hai phương pháp để vẽ (C’):

Cách 1: Vẽ (C’) trong hệ tọa độ IXY giống hệt (C) trong hệ tọa độ Oxy.

Cách 2: Tịnh tiến (C) theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ được (C').

Vấn đề đặt ra là: Phép tịnh tiến hệ tọa độ được ứng dụng như thế nào trong việc vẽ đồ thị hàm số ở SGK Giải tích 12 – nâng cao? Để trả lời câu hỏi trên, chúng tôi phân tích vấn đề vẽ đồ thị trong SGK Giải tích 12 – nâng cao.

1.3.3.2. Vấn đề khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trong SGK Giải tích 12

Như đã phân tích, chương trình Giải tích 12 đề cập đến việc ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số, đồng thời đề cập đến đồ thị của các hàm số mũ, hàm số lũy thừa và hàm số logarit.

Trong luận văn này, chúng tôi không đi sâu vào việc phân tích phần lý thuyết trong SGK mà chúng tôi quan tâm đến kiểu nhiệm vụ T_{11} sau đây:

Kiểu nhiệm vụ T_{11}: Dựng đồ thị hàm số.

Có 48 câu trên tổng số 224 câu hỏi của chương 1.

Kĩ thuật giải quyết kiểu nhiệm vụ này được nêu cụ thể trong SGK Giải tích 12 – Nâng cao dưới dạng sơ đồ khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ([19], trang 37):

"1^o. Tìm tập xác định của hàm số.

2^o. Xét sự biến thiên của hàm số

a) Tìm giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực (nếu có) của hàm số.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).

b) Lập bảng biến thiên của hàm số, bao gồm:

Tìm đạo hàm của hàm số, xét dấu đạo hàm, xét chiều biến thiên và tìm cực trị của hàm số (nếu có), điền các kết quả vào bảng.

3^o. Vẽ đồ thị của hàm số

- Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị (nếu có).
- Xác định một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ. (trong trường hợp đồ thị không cắt các trục tọa độ hoặc việc tìm tọa độ giao điểm phức tạp thì bỏ qua phần này).
- Nhận xét về đồ thị: Chỉ ra trục và tâm đối xứng của đồ thị (nếu có, không yêu cầu chứng minh)."

Nhận xét:

Từ kĩ thuật trên ta thấy SGK mong muốn việc vẽ đồ thị hàm số phải dựa vào việc khảo sát sự biến thiên bằng công cụ đạo hàm. Bước vẽ đồ thị được thực hiện bằng cách nối các điểm đặc biệt lại với nhau.

Đặc điểm của kiểu nhiệm vụ T_{11}:

Các loại hàm số được đề cập đến trong kiểu nhiệm vụ này gồm:

- Hàm số bậc 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$
- Hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$
- Hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$

Ngoài ra còn có hàm số trị tuyệt đối của các hàm số trên. Việc vẽ đồ thị của các hàm trị tuyệt đối được thực hiện bằng phép đối xứng trục. Ta xét ví dụ sau ([19], trang 30):

> "56. a) khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$
>
> b) Từ đồ thị (C) suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2}{|x + 1|}$ "

Việc vẽ đồ thị hàm số trên bằng phép đối xứng trục được thể hiện rõ trong SGV ([19], trang 80):

> "b) Giữ nguyên phần của đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần của (C) nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành."

Việc đưa vào các bài tập vẽ đồ thị bằng phép đối xứng trục một lần nữa cho thấy việc sử dụng phép biến đổi đồ thị trong việc vẽ đồ thị hàm số được thể hiện một cách tường minh trong SGK. Tuy nhiên, chương 1 chỉ có 3 bài tập sử dụng phép biến đổi đồ thị. Và đặc biệt là, không có bài tập nào sử dụng phép tịnh tiến đồ thị cũng như phép tịnh tiến hệ trục tọa độ trong việc vẽ đồ thị hàm số.

Như vậy, phép tịnh tiến hệ trục tọa độ không được sử dụng trong việc vẽ đồ thị hàm số.

Tiếp theo, chúng ta quan tâm đến đồ thị các hàm số mũ, hàm số lũy thừa và hàm số logarit trong SGK.

1.3.3.3. Đồ thị hàm số mũ, hàm số logarit và hàm số lũy thừa trong SGK Giải tích 12

SGK sử dụng công cụ đạo hàm trong việc khảo sát và vẽ đồ thị hàm số mũ và hàm số logarit. Để làm được điều này, SGK trình bày 3 định lý liên quan đến giới hạn và đạo hàm các hàm số mũ và logarit.

Định lý 1 sau đây là cơ sở cho việc tính đạo hàm của hai loại hàm số trên ([19], trang 102):

"Định lý 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

"

Từ định lý 1, SGK chứng minh được định lý 2 và định lý 3 sau đây ([19], trang 103):

"Định lý 2:

a) Hàm số $y=a^x$ có đạo hàm tại mọi điểm $x\in\mathbb{R}$ và

$$\left(a^x\right)'=a^x\ln a;\text{ nói riêng ta có }\left(e^x\right)'=e^x.$$

b) Nếu hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm trên *J* thì hàm số $y=a^{u(x)}$ có đạo hàm trên *J* và

$$\left(a^{u(x)}\right)'=u'(x)a^{u(x)}\ln a;\text{ nói riêng ta có }\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)e^{u(x)}.$$

Chứng minh

a) Trước hết ta xét hàm số $y=e^x$. Giả sử *x* là một số tùy ý. Kí hiệu Δx là số gia của biến số tại *x* và Δy là số gia của hàm số tương ứng với nó, ta có

$$\Delta y=e^{x+\Delta x}-e^x=e^x\left(e^{\Delta x}-1\right).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x}\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=e^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^{x}$$

Vậy $\left(e^{x}\right)'=e^{x}$ với mọi *x*.

Đối với hàm số $y=a^{x}$, ta có $a^{x}=e^{\ln a^{x}}=e^{x\ln a}$ nên theo công thức đạo hàm của hàm số hợp, ta có

$$\left(a^{x}\right)'=\left(e^{x\ln a}\right)'=e^{x\ln a}\left(x\ln a\right)'=a^{x}\ln a \text{ (với mọi } x\in\mathbb{R}\text{).}$$

b) Kết luận này suy ra từ phần a) của định lý và công thức đạo hàm của hàm số hợp.” ([19], trang 103)

Định lý 3 về đạo hàm của hàm số logarit cũng được SGK phát biểu và chứng minh dựa vào giới hạn trong định lý 1 ([19], trang 104):

“Định lý 3:

Hàm số $y=\log_a x$ có đạo hàm tại mọi điểm *x* > 0 và

$\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$; nói riêng ta có $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$.

Nếu hàm số $u=u(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm trên *J* thì hàm số $y=\log_a u(x)$ có đạo hàm trên *J* và

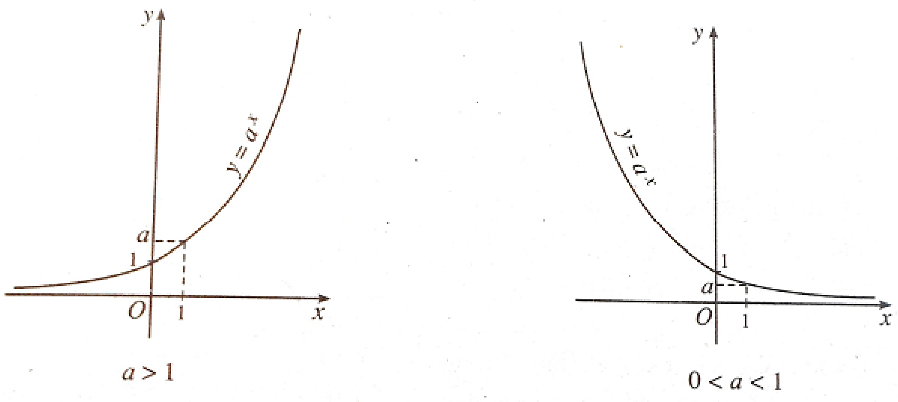
$$\left(\log_a u(x)\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)\ln a}\text{; nói riêng ta có }\left(\ln u(x)\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}\text{.”}$$

Từ kết quả của đạo hàm các hàm số mũ và hàm số logarit, người ta có thể dễ dàng khảo sát sự biến thiên của hàm số mũ $y=a^{x}$ dựa vào giá trị của cơ số *a*. Kết quả về sự biến thiên và đồ thị của hàm số mũ được tóm tắt trong SGK như sau ([19], trang 107):

“Hàm số $y=a^{x}$

* Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là khoảng $(0;+\infty)$;
* Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi *a* > 1 , nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi 0 < *a* < 1;
* Có đồ thị:
  - Đi qua điểm (0;1),
  - Nằm ở phía trên trục hoành,
  - Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

Đồ thị có một trong hai dạng nêu ở hình 2.3.



Hình 2.3

Đối với hàm số logarit $y = \log_a x$, cách làm cũng tương tự hàm số mũ và ta cũng có bảng tóm tắt ([19], trang 109):

" Hàm số $y = \log_a x$

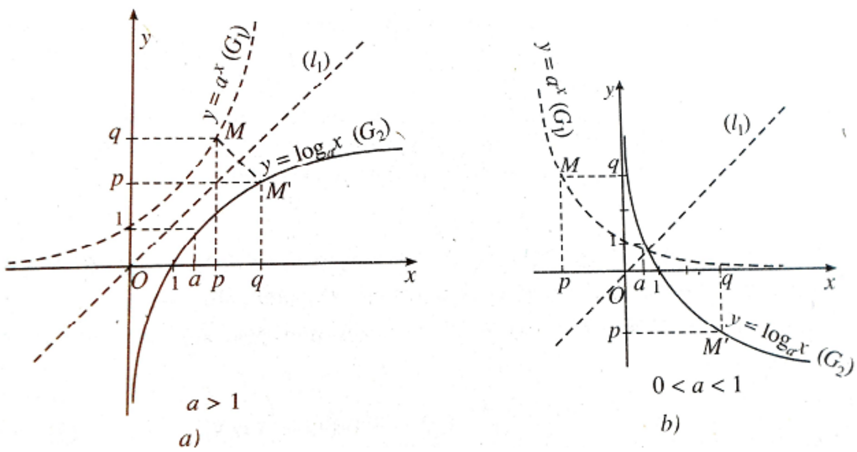
* Có tập xác định là khoảng $(0;+\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;

* Đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi $a > 1$, nghịch biến trên $(0;+\infty)$ khi $0 < a < 1$;

* Có đồ thị

- Đi qua điểm (1;0),
- Nằm ở bên phải trục tung,
- Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

Đồ thị có một trong hai dạng nêu ở hình 2.5 (đường liền nét).



Hình 2.5

Có một điều mà chúng tôi đặc biệt quan tâm trong phần này đó là mối liên hệ giữa đồ thị của hàm số mũ $y = a^x$ và đồ thị hàm số logarit $y = \log_a x$. Mối liên hệ đó

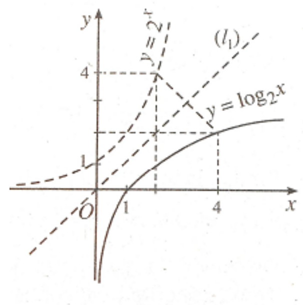
được SGK nêu ra trong phần nhận xét chung về đồ thị của hai loại hàm số này ([19], trang 109):

"Nếu gọi (G_1) là đồ thị của hàm số $y = a^x$ và (G_2) là đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ thì (G_1) và (G_2) đối xứng nhau qua đường phân giác (l_1) của góc phần tư thứ nhất.

Thật vậy, xét điểm *M* (*p;q*) bất kì, điểm đối xứng với *M* qua (l_1) là điểm *M'*(*q;p*), ta có (h.2.5):

$M(p;q) \in (G_1) \Leftrightarrow q = a^p \Leftrightarrow p = \log_a q \Leftrightarrow M'(q;p) \in (G_2)$.

Điều đó đã chứng minh nhận xét trên. Ta cũng có thể kiểm nghiệm lại nhận xét này đối với hai hàm số $y = \log_2 x$ và $y = 2^x$ (h. 2.6) bằng cách gấp tờ giấy theo đường *(l_1)*"



Hình 2.6

Nhận xét trên có thể đóng vai trò là yếu tố kĩ thuật trong kiểu nhiệm vụ vẽ đồ thị hàm số bằng phép biến đổi đồ thị mà chúng ta đã đề cập ở phần trước. Với tính chất đối xứng qua đường phân giác thứ nhất của đồ thị hai hàm số trên, ta có thể vẽ đồ thị của hàm số $y = a^x$ khi biết đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và ngược lại. Tuy nhiên, trong phần bài tập, chúng tôi không tìm thấy bài tập nào thể hiện mối liên hệ này trong việc vẽ đồ thị.

Sự biến thiên và đồ thị của hàm số lũy thừa được khảo sát dựa trên công thức đạo hàm $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ([19], trang 116):

"Từ công thức $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ta suy ra hàm số $y = x^\alpha$ đồng biến trên trên khoảng $(0;+\infty)$ nếu $\alpha > 0$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$ nếu $\alpha < 0$. Hình 2.9 thể hiện đồ thị của một số hàm số lũy thừa trên khoảng $(0;+\infty)$."

Nhận xét:

Những phân tích SGK đại số và giải tích từ lớp 10 đến lớp 12 cho thấy việc vẽ đồ thị hàm số bằng phép biến đổi đồ thị được đề cập một cách tường minh trong cả phần lý thuyết và bài tập. Tuy nhiên, số lượng bài tập liên quan đến kiểu nhiệm vụ vẽ đồ thị hàm số bằng phép biến đổi đồ thị là quá ít (xem bảng thống kê sau):

Lớp	Số bài tập vẽ đồ thị bằng phép biến đổi đồ thị	Số bài tập về vẽ đồ thị hàm số
10	0	25
11	6 (2 câu sử dụng phép tịnh tiến)	12
12	3	48
Tổng	9	85

Với sự ảnh hưởng của việc giải quá nhiều bài tập vẽ đồ thị hàm số bằng phương pháp khảo sát trực tiếp trong khi chỉ có 9/85 bài tập thể hiện việc vẽ đồ thị bằng phép biến đổi đồ thị (chỉ có 2 câu sử dụng phép tịnh tiến), một câu hỏi nghiên cứu tất yếu được đặt ra:

"*Việc vẽ đồ thị hàm số bằng phép biến đổi đồ thị, đặc biệt là phép tịnh tiến có thật sự được hình thành ở học sinh hay không?*"

KẾT LUẬN CHƯƠNG I

Phân tích chương trình và SGK cho phép chúng tôi trả lời một phần những câu hỏi được đặt ra ban đầu. Cụ thể những kết quả chủ yếu của phân tích này được thể hiện như sau.

- **Về mối liên hệ giữa hệ thống biểu đạt đại số và hệ thống biểu đạt bằng đồ thị:**

Mối liên hệ giữa hệ thống biểu đạt đại số và hệ thống biểu đạt bằng đồ thị được thể hiện trong bảng sau:

Tính chất của hàm số thể hiện bởi biểu thức đại số	**Tính chất của hàm số thể hiện qua đồ thị hàm số**
$y_0 = f(x_0)$ (với $x_0 \in D$)[1]	Điểm $(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị của hàm số.
$f(x) > 0, \forall x \in K$ [2]	Đồ thị của hàm số nằm phía trên trục hoành khi $x \in K$.
$f(x) < 0, \forall x \in K$	Đồ thị của hàm số nằm phía dưới trục hoành khi $x \in K$.
Hàm số đồng biến trên *K*: $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.	Trên *K*, đồ thị của hàm số đi lên (theo chiều tăng của đối số).
Hàm số nghịch biến trên *K*: $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.	Trên *K*, đồ thị của hàm số đi xuống (theo chiều tăng của đối số).
Hàm số không đổi trên *K*: $y = m$ (m là hằng số).	Đồ thị của hàm số nằm trên đường thẳng song song (hoặc trùng) với trục hoành.
$y = f(x)$ là hàm số chẵn: $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$	Đồ thị hàm số có trục đối xứng là trục tung.

[1] $y = f(x)$ là một hàm số với tập xác định D.

[2] K là một khoảng (nửa khoảng hay đoạn) nằm trong D.

$y = f(x)$ là hàm số lẻ: $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$	Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là gốc tọa độ.

Dựa vào mối liên hệ trên, SGK đưa ra ba kiểu nhiệm vụ mà ở đó, mối liên hệ giữa đồ thị hàm số với biểu thức đại số của nó đóng vai trò là yếu tố kĩ thuật. Đó là các kiểu nhiệm vụ:

- Kiểu nhiệm vụ T_1: Xét dấu biểu thức bằng đồ thị.
- Kiểu nhiệm vụ T_2: Xét tính chẵn – lẻ của hàm số bằng đồ thị.
- Kiểu nhiệm vụ T_3: Xét tính đồng biến – nghịch biến của hàm số.

Dấu hiệu để học sinh sử dụng đồ thị để giải quyết các bài tập là trong đề bài, yếu tố đồ thị được cho trước. Từ đó dẫn đến câu hỏi nghiên cứu sau:

Trong trường hợp đồ thị hàm số không được cho trước, học sinh có biết vẽ đồ thị hàm số để sử dụng đồ thị hàm số trong việc khảo sát các tính chất của hàm số hay không?

❖ **Về vấn đề biến đổi đồ thị:**

Hai trường hợp làm việc với phép biến đổi đồ thị được SGK đề cập đến là:

- Làm việc với hệ trục tọa độ cố định
- Làm việc với đường cong cố định.

➢ **Trong trường hợp làm việc với hệ trục toạ độ cố định:**

Phép biến đổi đồ thị được đề cập trong SGK đối với trường hợp này là: phép tịnh tiến đồ thị, phép đối xứng qua trục Ox, phép đối xứng qua trục Oy, phép co dãn theo 2 trục, phép đối xứng qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Các phép biến đổi đồ thị trên thể hiện mối liên hệ giữa việc biến đổi đại số từ hàm số f sang hàm số h với việc biến đổi hình học từ đồ thị G_f của hàm số f sang đồ thị G_h của hàm số h.

Phép biến đổi đồ thị trường hợp làm việc với mục tiêu cố định được đề cập trong cả 3 SGK nâng cao từ lớp 10 đến lớp 12

- **Ở lớp 10:**

Phép biến đổi đồ thị được đề cập đến là phép tịnh tiến đồ thị với mục đích sử dụng phép tịnh tiến đồ thị để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ từ đồ thị hàm số $y = ax^2$.

Ngoài ra, vai trò của phép tịnh tiến đồ thị còn được thể hiện qua các kiểu nhiệm vụ sau:

- Kiểu nhiệm vụ T_4: Xác định biểu thức đại số của hàm số có đồ thị là ảnh của đồ thị hàm số cho trước qua phép tịnh tiến.

Đối với kiểu nhiệm vụ này, đồ thị hàm số mới không được thể hiện một cách tường minh, tuy nhiên vì đồ thị hàm số mới là ảnh của đồ thị hàm số ban đầu nên hai hàm số này có tính chất tương tự nhau. Câu hỏi đặt ra ở đây là:

"*Khi xác định được biểu thức đại số của hàm số có đồ thị là ảnh của một đồ thị hàm số cho trước qua phép tịnh tiến, học sinh có vận dụng được các tính chất của hàm số ban đầu để suy ra các tính chất của hàm số mới hay không?*"

- Kiểu nhiệm vụ T_5: Xác định phép tịnh tiến biến đồ thị hàm số này thành đồ thị hàm số kia.

Ý nghĩa của việc xác định được phép tịnh tiến biến đồ thị hàm số này thành đồ thị hàm số kia được thể hiện qua kiểu nhiệm vụ T_6

- Kiểu nhiệm vụ T_6: Mô tả đồ thị hàm số bậc hai.

Việc mô tả đồ thị hàm số bậc hai bằng phép tịnh tiến thể hiện một cách ngầm ẩn quá trình dựng đồ thị hàm số $y = a(x-p)^2 + q$ từ đồ thị hàm số $y = ax^2$ (xem như đã biết). Tuy nhiên, cũng có thể mô tả đồ thị hàm số bậc hai thông qua việc tính các giá trị $\frac{-b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}$. Điều này được thể hiện trong kiểu nhiệm vụ T_7: Vẽ đồ thị hàm số bậc hai.

Với sự ảnh hưởng của việc vẽ đồ thị hàm số bậc hai bằng sơ đồ khảo sát trong SGK, câu hỏi đặt ra là:

"*Học sinh có biết vận dụng phép tịnh tiến trong việc mô tả đồ thị hàm số* $y = a(x-p)^2 + q$ *hay không? Từ đó, phép tịnh tiến đồ thị có được học sinh sử dụng để vẽ đồ thị hàm số* $y = a(x-p)^2 + q$ *khi đã có đồ thị hàm số* $y = ax^2$ *hay không?*"

- **Ở lớp 11:**

Phép tịnh tiến đồ thị được sử dụng trong việc vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$ từ đồ thị hàm số $y = \sin x$.

Đặc biệt, SGK đại số và giải tích 11 nâng cao đề cập đến kiểu nhiệm vụ T_8: "Vẽ đồ thị hàm số lượng giác" với việc sử dụng các phép biến đổi đồ thị sau trong việc vẽ đồ thị: Phép tịnh tiến đồ thị, phép đối xứng trục, phép co dãn. Điều này thể hiện thể chế mong muốn sử dụng phép biến đổi đồ thị trong việc nghiên cứu hàm số nói chung và trong việc vẽ đồ thị hàm số nói riêng.

- **Ở lớp 12:**

Kiểu nhiệm vụ vẽ đồ thị hàm số cũng xuất hiện trong SGK giải tích 12 nâng cao. Tuy nhiên, chỉ có 3 câu trên tổng số 48 câu thể hiện việc ứng dụng phép biến đổi đồ thị. Đặc biệt, không có bài tập nào thể hiện việc ứng dụng phép tịnh tiến trong việc vẽ đồ thị. Với sự ảnh hưởng của việc giải quá nhiều bài tập vẽ đồ thị hàm số bằng việc khảo sát trực tiếp, "*kĩ năng vẽ đồ thị hàm số bằng phép biến đổ đồ thị, đặc biệt là phép tịnh tiến có thật sự được hình thành ở học sinh hay không?*"

- **Trong trường hợp làm việc với đường cong cố định**

Trường hợp này xuất hiện trong SGK giải tích 12 nâng cao với phép biến đổi đồ thị được đề cập là phép tịnh tiến hệ trục tọa độ.

Phép tịnh tiến hệ trục tọa độ thực chất là một trường hợp đặc biệt của phép đổi mục tiêu trực chuẩn.

Với phép tịnh tiến hệ trục tọa độ, một đường cong có thể là đường biểu diễn đồ thị của nhiều hàm số khác nhau trong hệ tọa độ tương ứng. Mối liên hệ giữa biểu thức đại số của các hàm số đó được thể hiện qua công thức chuyển hệ trục tọa độ. Dựa vào mối liên hệ này, học sinh có thể sử dụng phép tịnh tiến hệ trục tọa độ để giải

quyết các bài toán xác định tính đối xứng của đồ thị hàm số. Cụ thể, trong SGK là kiểu nhiệm vụ T_{10}: Xác định tâm đối xứng của đồ thị hàm số. Việc ứng dụng phép tịnh tiến hệ trục tọa độ trong việc vẽ đồ thị hàm số không được đề cập đến trong SGK.

CHƯƠNG 2: THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

A. Mục đích thực nghiệm

Chương này trình bày một thực nghiệm với mục đích tìm các yếu tố giúp trả lời các câu hỏi nghiên cứu đặt ra ở chương 1.

Trước hết, xin nhắc lại các câu hỏi nghiên cứu đã được đặt ra như sau:

- Trong trường hợp đồ thị hàm số không được cho trước, học sinh có biết tự vẽ đồ thị rồi sử dụng đồ thị hàm số trong việc xét dấu biểu thức, xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất và đặc biệt là tính đồng biến – nghịch biến của hàm số hay không?
- Khi xác định được biểu thức đại số của hàm số có đồ thị là ảnh của một đồ thị hàm số cho trước qua phép tịnh tiến, học sinh có vận dụng được các tính chất của hàm số ban đầu để suy ra các tính chất của hàm số mới hay không?
- Học sinh có biết vận dụng phép tịnh tiến trong việc mô tả đồ thị hàm số $y = a(x-p)^2 + q$ hay không? Từ đó, phép tịnh tiến đồ thị có được học sinh sử dụng để vẽ đồ thị hàm số $y = a(x-p)^2 + q$ khi đã có đồ thị hàm số $y = ax^2$ hay không?
- Kĩ năng vẽ đồ thị hàm số bằng phép biến đổ đồ thị, đặc biệt là phép tịnh tiến có thật sự được hình thành ở học sinh hay không?

Ba câu hỏi sau có liên quan đến phép biến đổi đồ thị, đặc biệt là phép tịnh tiến đồ thị. Do thời gian thực hiện nghiên cứu có hạn, chúng tôi phải giới hạn việc nghiên cứu thực nghiệm cho câu hỏi cuối cùng: *Kĩ năng vẽ đồ thị hàm số bằng phép biến đổ đồ thị, đặc biệt là phép tịnh tiến có thật sự được hình thành ở học sinh hay không?*

Như vậy, để đạt được mục đích như đã nêu, chúng tôi nhận thấy cần thiết tiến hành hai thực nghiệm sau đây:

- Thực nghiệm 1: Tìm hiểu việc sử dụng đồ thị hàm số trong việc xét tính đồng biến – nghịch biến của hàm số.

- Thực nghiệm 2: Tìm hiểu việc ứng dụng phép tịnh tiến đồ thị trong việc vẽ đồ thị hàm số ở học sinh.

Hai thực nghiệm trên được tiến hành độc lập. Thực nghiệm hai sau khi hoàn thành cũng giúp chúng tôi trong việc trả lời một phần các câu hỏi thứ hai và thứ ba.

B. Nội dung thực nghiệm

2.1. Thực nghiệm 1

2.1.1. Mục đích của thực nghiệm

Như đã nói ở trên, thực nghiệm 1 có mục đích tìm kiếm các yếu tố cho phép trả lời câu hỏi: *Trong trường hợp đồ thị hàm số không được cho trước, học sinh có biết tự vẽ đồ thị rồi sử dụng đồ thị hàm số trong việc xét tính đồng biến – nghịch biến của hàm số hay không?*

Với câu hỏi nghiên cứu trên, ta cần xây dựng câu hỏi thực nghiệm nhằm kiểm chứng kĩ năng xét tính đồng biến – nghịch biến của hàm số dựa vào đồ thị ở học sinh. Nghĩa là dựa vào đồ thị hàm số, chỉ ra các khoảng mà hàm số đồng biến hay nghịch biến.

2.1.2. Hình thức thực nghiệm

Thực nghiệm sẽ được tiến hành dưới hình thức bài toán thực nghiệm dành cho học sinh lớp 11 học theo chương trình nâng cao tại thời điểm đầu học kì I.

2.1.3. Phân tích tiên nghiệm câu hỏi thực nghiệm

a. Xây dựng câu hỏi thực nghiệm

Câu hỏi thực nghiệm được xây dựng dựa trên sự lựa chọn của các biến tình huống sau:

+ Các biến liên quan đến bản chất của hàm số và đồ thị hàm số

- Đồ thị hàm số có thuộc các dạng được yêu cầu vẽ trong chương trình và SGK hay không?
- Việc vẽ đồ thị hàm số là dễ dàng hay khó khăn, dựa trên kiến thức nào?
- Việc tính toán dựa trên biểu thức đại số của hàm số là dễ dàng hay khó khăn?

+ Các biến liên quan đến hình thức của câu hỏi

- Đồ thị hàm số có được cho trước hay yêu cầu vẽ trước hay không?
- Có các yếu tố tạo điều kiện thuận lợi cho việc vẽ đồ thị hay không?
- Cách phát biểu yêu cầu về xét tính đơn điệu: Sự lựa chọn các thuật ngữ: xét tính đơn điệu, xét tính đồng biến – nghịch biến, xét (khảo sát) sự biến thiên (chiều biến thiên).
- Khoảng cần xét tính đồng biến – nghịch biến có được cho trước hay không?

+ Các biến liên quan đến kiến thức của học sinh

- Học sinh đã học hình học giải tích hay chưa?
- Học sinh đã học đạo hàm hay chưa?
- Loại bài tập về xét tính đơn điệu của hàm số có xuất hiện trong SGK tại thời điểm thực nghiệm hay không?

b. Câu hỏi thực nghiệm

Với mục đích thực nghiệm như trên và dựa trên các biến tình huống trên, chúng tôi xây dựng câu hỏi thực nghiệm như sau:

Cho hàm số $y = f\left(x\right) = \sqrt{4 - \left(x-1\right)^2}$

a. Tìm tập xác định D của hàm số.

b. Chứng minh đồ thị của hàm số trên là một nửa đường tròn nằm phía trên trục hoành. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó. (*gợi ý: chứng minh* $\left(x-1\right)^2 + y^2 = 4$)

c. Khảo sát sự biến thiên của hàm số đã cho trên D

c. Phân tích các chiến lược

Câu a. Tập xác định của hàm số là $D = \left[-1;3\right]$

Câu b. Vì $\left(x-1\right)^2 + y^2 = 4$ và $y \geq 0, \forall x \in D$ nên đồ thị hàm số đã cho là nửa nằm trên trục hoành của đường tròn tâm $I\left(1;0\right)$ và bán kính là R = 2

Câu c.

Có bốn chiến lược cho phép xét tính đồng biến – nghịch biến của hàm số trên

Chiến lược 1: Chiến lược đại số.

Với $x_1 \neq x_2 \in D$, lập tỉ số

$$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{4-(x_2-1)^2} - \sqrt{4-(x_1-1)^2}}{x_2 - x_1} = \frac{4-(x_2-1)^2 - 4 + (x_1-1)^2}{(x_2-x_1)\left(\sqrt{4-(x_2-1)^2} + \sqrt{4-(x_1-1)^2}\right)}$$

$$= \frac{-(x_2-1)^2 + (x_1-1)^2}{(x_2-x_1)\left(\sqrt{4-(x_2-1)^2} + \sqrt{4-(x_1-1)^2}\right)} = \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)}{(x_2-x_1)\left(\sqrt{4-(x_2-1)^2} + \sqrt{4-(x_1-1)^2}\right)}$$

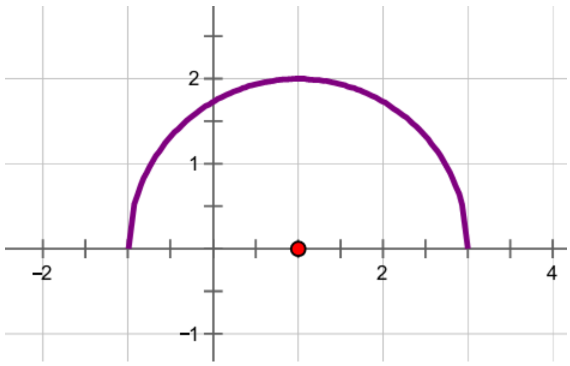
$$= \frac{2 - x_1 - x_2}{\sqrt{4-(x_2-1)^2} + \sqrt{4-(x_1-1)^2}}$$

Với mọi $x_1, x_2 \in (-1;1)$ thì $2 - x_1 - x_2 > 0 \Rightarrow k > 0$. Do đó hàm số đồng biến trên (-1; 1).

Với mọi $x_1, x_2 \in (1;3)$ thì $2 - x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow k < 0$. Do đó hàm số nghịch biến trên (1; 3).

Chiến lược 2: Chiến lược đồ thị

Vì đồ thị hàm số là nửa đường tròn tâm $I(1;0)$ và bán kính là R = 2 nên ta có đồ thị hàm số như sau:



Trên (-1; 1) đồ thị hàm số đi lên do đó hàm số đồng biến trên (-1; 1).

Trên (1; 3) đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên (1; 3).

Chiến lược 3: Chiến lược đạo hàm

$$y' = \frac{-x+1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

Bảng biến thiên:

x	-1		1		3
y'		+	0	-	
y		↗	2	↘	
	0				0

Từ bảng biến thiên ta có: hàm số đồng biến trên (-1; 1) và nghịch biến trên (1; 3)

d. Phân tích ảnh hưởng của các biến đến các chiến lược

Việc lựa chọn giá trị của các biến nhằm hướng tới chiến lược đồ thị ở học sinh. Thật vậy, chúng ta sẽ phân tích chi tiết sự ảnh hưởng của từng biến đến việc lựa chọn chiến lược ở học sinh, từ đó xác định được chiến lược tối ưu.

- Ảnh hưởng của các biến liên quan đến bản chất của hàm số và đồ thị hàm số.
  - Hàm căn thức bậc hai gây khó khăn cho chiến lược đại số và chiến lược đạo hàm vì việc tính toán trên các biểu thức chứa căn trở nên phức tạp.
  - Tuy nhiên, việc vẽ đồ thị hàm số chứa căn nói chung là phức tạp và không phải là loại hàm số mà đồ thị của nó được nghiên cứu trong chương trình và SGK, do đó, việc lựa chọn hàm số mà đồ thị của nó là đường tròn sẽ khắc phục được vấn đề trên vì đường tròn là một đường rất quen thuộc với học sinh trong dạy học hình học phẳng.
- Ảnh hưởng của các biến liên quan đến hình thức của câu hỏi
  - Việc không cho trước đồ thị cũng như không yêu cầu vẽ đồ thị nhằm mục đích để học sinh tự do lựa chọn chiến lược giải quen thuộc với họ. Độ khó của từng chiến lược chính là yếu tố giúp họ thay đổi chiến lược phù hợp hơn. Điều này sẽ giúp chúng tôi tìm ra các yếu tố để trả lời câu hỏi nghiên cứu.
  - Việc yêu cầu học sinh chứng minh đồ thị hàm số là nửa đường tròn nằm phía trên trục hoành chính là yếu tố giúp cho việc vẽ đồ thị (nếu cần) trở nên dễ dàng hơn, điều này sẽ tạo thuận lợi hơn cho chiến lược đồ thị xuất hiện.
  - Khoảng cần xét tính đồng biến – nghịch biến không được cho trước sẽ gây khó khăn cho chiến lược đại số mà không ảnh hưởng gì đến chiến

lược hình học, tất nhiên học sinh hiểu được việc khảo sát sự biến thiên là tìm ra các khoảng mà ở đó hàm số đồng biến hay nghịch biến vì kiểu nhiệm vụ này đã xuất hiện trong SGK đại số 10 nâng cao (xem chương 1).

- Thuật ngữ khảo sát sự biến thiên xuất hiện trong SGK đại số 10 cũng như SGK đại số và giải tích 11 nâng cao, thuật ngữ xét tính đơn điệu chỉ xuất hiện trong SGK giải tích 12 nên việc lựa chọn thuật ngữ khảo sát sự biến thiên sẽ giúp học sinh lớp 11 hiểu được yêu cầu đề bài.

- Ảnh hưởng của các biến liên quan đến kiến thức của học sinh
  - Học sinh lớp 11 đã được học về phương trình đường tròn, hơn nữa việc vẽ đồ thị đường tròn cũng xuất hiện trong sách bài tập hình học 10 nâng cao, điều này tạo thuận lợi cho việc vẽ đồ thị của hàm số trên.
  - Việc lựa chọn thời điểm đầu học kì I với mục đích tận dụng thời điểm mà học sinh được ôn lại các kiến thức về hình học giải tích nhằm phục vụ cho việc học về biểu thức tọa độ của phép biến hình. Do đó, việc chứng minh đồ thị hàm số là nửa đường tròn và xác định tâm, bán kính của đường tròn đối với học sinh là việc làm dễ dàng.
  - Việc khảo sát sự biến thiên bằng đồ thị cũng được trình bày trong SGK đại số và giải tích 11 nâng cao (khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = \cos x$) tạo điều kiện cho chiến lược đồ thị xuất hiện.
  - Học sinh lớp 11 chưa được học đạo hàm nên chiến lược đạo hàm không thể xuất hiện.

Từ những phân tích trên, ta thấy rằng, chiến lược tối ưu trong bài toán này là chiến lược đồ thị.

2.1.4. Phân tích hậu nghiệm

2.1.4.1. Thực nghiệm lần 1

Thực nghiệm lần 1 được tiến hành trên 98 học sinh thuộc hai lớp 11A1 và lớp 11A2 ở trường THPT Ngô Quyền tại TPHCM. Đối tượng học sinh của lớp thực nghiệm là học sinh khá giỏi có điểm trung bình môn Toán từ 8 trở lên.

Từ các bài làm của học sinh, chúng tôi ghi nhận được một chiến lược đặc biệt mà trong một số trường hợp có thể đưa ra lời giải đúng. Chúng tôi tạm gọi chiến lược của bài làm đó là chiến lược **"hoành độ nguyên".**

Lời giải của học sinh như sau:

x	-1		0		1		2		3
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0

Ta có thể mô tả chiến lược này của học sinh như sau:

Lập bảng biến thiên với các giá trị nguyên của x. Sau đó tính và so sánh các giá trị tương ứng của y rồi vẽ dấu mũi tên lên xuống theo kết quả so sánh được.

Phạm vi hợp thức của chiến lược này là đối với các hàm số đạt cực trị tại hoành độ nguyên.

Sau đây là thống kê chi tiết kết quả thực nghiệm.

Bảng 2.1.1: Thống kê câu trả lời cho câu c của học sinh hai lớp thực nghiệm

	Chiến lược đại số	Chiến lược đồ thị	Chiến lược hoành độ nguyên	Không trả lời
	54/98 hs (55%)	0/98 hs (0%)	2/98 hs (2%)	42/98 hs (43%)
Tỉ lệ thành công	0 hs	0 hs	0 hs	0 hs

Nhận xét về số liệu thu được:

- Chiến lược đồ thị không xuất hiện ở cả hai lớp.
- Có 54/98 học sinh (chiếm 55%) học sinh sử dụng chiến lược đại số, tuy nhiên họ đều thất bại trong việc lập tỉ số. Vì vậy, họ không kết luận được sự biến thiên của hàm số trên. Trong số 54 học sinh làm theo chiến lược đại số, chúng tôi còn ghi nhận được một số hiện tượng sau:
    + Có 5 học sinh làm câu c trước rồi mới quay lại làm câu b. Mặc dù thất bại với chiến lược đại số nhưng khi làm được câu b rồi họ vẫn không thay đổi chiến lược của mình. Điều này cho thấy sự ảnh hưởng mạnh

mẽ của một hợp đồng Didactic, theo đó: đồ thị phải được suy ra từ việc khảo sát hàm số.

+ Có 2 học sinh vẽ đồ thị ở câu b, nhưng khi thất bại với chiến lược đại số ở câu c, họ vẫn không nghĩ tới chiến lược đồ thị. Điều này cho thấy sự ảnh hưởng rất lớn của kĩ thuật đại số trong các bài toán liên quan đến hàm số. Đồng thời cũng giải thích cho việc thất bại của học sinh không phải do học sinh không biết vẽ đồ thị mà do học sinh không biết cách đọc các tính chất từ đồ thị.[1]

Trong số 42/98 học sinh không đưa ra câu trả lời, chúng tôi ghi nhận được 13 trường hợp không xác định được tâm và bán kính của đường tròn trong câu b. Việc bỏ trống câu c ở 42 học sinh này có thể do hai khả năng:

+ Gặp khó khăn trong chiến lược đại số nhưng lại không sử dụng được gợi ý của câu b do không xác định được tâm và bán kính của đường tròn.
+ Không nhớ kiến thức về sự biến thiên của hàm số.

Như vậy, mặc dù không đưa ra được kết quả cho câu hỏi nhưng rõ ràng, số lời giải theo chiến lược đại số xuất hiện khá nhiều, chiếm tới 55%.

Như vậy, trong trường hợp đồ thị không được cho trước, học sinh không nghĩ tới việc tự vẽ đồ thị, rồi đọc các thông tin từ đồ thị để suy ra sự biến thiên của hàm số.

Việc thất bại xảy ra đối với hàng loạt học sinh được chọn làm thực nghiệm có thể được giải thích từ sự ảnh hưởng của một hợp đồng Didactic theo đó: khi cho hàm số bằng biểu thức đại số, học sinh chỉ có nhiệm vụ khảo sát các tính chất của hàm số rồi suy ra đồ thị chứ không có trách nhiệm làm ngược lại là từ đồ thị suy ra tính chất của hàm số.[2]

Vấn đề đặt ra lúc này là: có thể bổ sung các yếu tố như thế nào vào phiếu thực nghiệm để gợi ý cho học sinh đến chiến lược đồ thị cho câu hỏi khảo sát sự biến thiên của hàm số?

2.4.1.2. Thực nghiệm lần 2

---

[1] Nhận định được bổ sung từ góp ý của TS. Trần Lương Công Khanh.
[2] Nhận định được bổ sung từ góp ý của TS. Trần Lương Công Khanh.

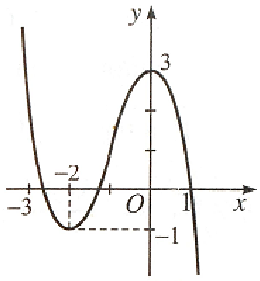
Với mong muốn bổ sung thêm các yếu tố môi trường nhằm tăng số lời giải theo chiến lược đồ thị, chúng tôi bổ sung thêm các yếu tố gợi ý vào câu hỏi thực nghiệm và tiến hành thực nghiệm lần 2 tại lớp 11A1.

Sau đây là câu hỏi thực nghiệm lần 2:

Bài 1:

a. (Trích bài 3, SGK đại số 10 – NC, trang 45):

Hình 2.9 là đồ thị của một hàm số có tập xác định là R. Dựa vào đồ thị, hãy lập bảng biến thiên của hàm số đó.



Hình 2.9

b. (Trích bài 4, SGK đại số 10 – NC, trang 45):

Khảo sát sự biến thiên của hàm số sau và lập bảng biến thiên của nó:

$y = x^2 + 2x - 2$ trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Bài 2: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{4-(x-1)^2}$

a. Chứng minh đồ thị của hàm số trên là một nửa đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó. (*gợi ý: chứng minh* $y^2 + (x-1)^2 = 4$)

b. Lập bảng biến thiên của hàm số trên.

Trong lần thực nghiệm này, chúng tôi bổ sung vào phiếu thực nghiệm hai câu hỏi trong SGK đại số 10 nhằm gợi ý cho học sinh bằng cách cung cấp thông tin về việc có hai kĩ thuật để lập bảng biến thiên của một hàm số, đó là sử dụng phương pháp

đại số và sử dụng phương pháp đồ thị. Sau đó, học sinh sẽ tự lựa chọn kĩ thuật giải cho bài 2. Ngoài ra, câu hỏi 1a còn giúp chúng tôi kiểm tra lại một câu hỏi nghiên cứu mạnh hơn là: *Học sinh có biết sử dụng đồ thị trong việc xét tính đồng biến nghịch biến của hàm số ngay cả khi đồ thị được cho trước hay không?*

Ở bài 2, chúng tôi bỏ đi câu hỏi về việc tìm tập xác định của hàm số vì lí do lần trước học sinh đã giải câu này rồi và việc bỏ câu này đi không ảnh hưởng nhiều đến các chiến lược câu hỏi liên quan đến việc xét tính biến thiên. Ở câu hỏi liên quan đến xét tính biến thiên, chúng tôi thay đổi cách hỏi bằng cách yêu cầu lập bảng biến thiên vì lí do, cách hỏi khảo sát sự biến thiên ở lần 1 đã khiến cho khá nhiều học sinh không đưa ra được lời giải nào. Đồng thời, trong câu hỏi thực nghiệm lần 2, thuật ngữ lập bảng biến thiên xuất hiện nhiều trong câu hỏi gợi ý trước đó.

Sau đây là kết quả thực nghiệm tại lớp 11A1:

Bảng 2.1.2: Thống kê câu trả lời bài 1 của học sinh lớp 11A1

	Trả lời đúng	Trả lời sai	Không trả lời
Bài 1a	25/49 hs (51%)	19/49 hs (39%)	5/49 hs (10%)
Bài 1b	20/49 hs (41%)	18/49 hs (37%)	11/49 hs (22%)

Các thông tin khác thu được từ thực nghiệm:

❖ **Đối với bài 1a:**

Trong số 25 học sinh trả lời đúng, chỉ có 9 học sinh đưa ra được bảng biến thiên chính xác như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y		↘	-1	↗	3	↘	

Còn lại 16 học sinh đưa ra bảng biến thiên có dạng như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y		↘	-1	↗	3	↘	0	↘	

Như vậy, thật ra chỉ có 9 học sinh (chiếm 18%) đưa ra được đáp án chính xác hoàn toàn, còn lại 16 (chiếm 33%) học sinh vẫn chưa thật sự biết lập bảng biến thiên từ đồ thị hàm số.

Các học sinh trả lời sai đã đưa ra bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y		$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ở các học sinh đưa ra lời giải như thế, có thể chiến lược họ dùng là điền vào dòng x các giá trị nguyên đặc biệt rồi vẽ mũi tên lên xuống xen kẽ. Như vậy chiến lược họ dùng là chiến lược "hoành độ nguyên".

❖ **Đối với bài 1b:**

Tất cả học sinh đều sử dụng chiến lược đại số (lập tỉ số). Đối với các học sinh giải sai, họ gặp khó khăn trong tính toán nên không xét dấu được tỉ số.

Kết quả trên cho thấy, học sinh đã gặp khó khăn trong việc lập bảng biến thiên từ đồ thị ngay cả khi đồ thị được cho trước, do đó, điều tất yếu là họ sẽ gặp khó khăn trong bài 2. Thật vậy, bảng thống kê sau đây sẽ cho thấy khó khăn của học sinh trong bài 2.

Bảng 2.1.3: Thống kê câu trả lời bài 2 của học sinh lớp 11A1

	Chiến lược đại số	Chiến lược đồ thị	Chiến lược hoành độ nguyên	Không trả lời
Số lượng	0/49 hs (0%)	0/49 hs (0%)	8/49 hs (16%)	41/49 hs (84%)
Tỉ lệ thành công	0 hs (0%)	0 hs (0%)	0 hs (0%)	0 hs (0%)

Kết quả thực nghiệm cho thấy, không có học sinh nào thành công trong bài 2, thậm chí là họ đã không đưa ra được lời giải nào. Chỉ có 8 học sinh (chiếm 16%) lập bảng biến thiên bằng chiến lược hoành độ nguyên và thu được bảng biến thiên như sau:

x	- 1		0		1		2		3
y	0	↗		↘		↗		↘	

Một nhược điểm trong thực nghiệm này của chúng tôi là đã không thu lại giấy nháp của học sinh nên không thống kê được số học sinh nghĩ tới chiến lược đồ thị.

Kết luận thực nghiệm lần 2:

Kết quả thực nghiệm trên cho thấy, học sinh gặp khó khăn trong việc lập bảng biến thiên dựa vào đồ thị hàm số ngay cả khi đồ thị đã được cho trước.

Để khắc phục điều này, chúng tôi bổ sung thêm vào phiếu thực nghiệm 2 ví dụ có lời giải trong SGK đại số 10 – nâng cao với mục đích cho học sinh ôn lại các kiến thức về tính đồng biến – nghịch biến của đồ thị và cung cấp cho học sinh thông tin về 2 kĩ thuật để khảo sát sự biến thiên của hàm số. Từ đó chúng tôi muốn kiểm tra xem học sinh sẽ lựa chọn kĩ thuật nào trong việc giải quyết bài toán thực nghiệm đưa ra. Sự thay đổi chiến lược giải (nếu có) xảy ra như thế nào?

2.4.1.3. Thực nghiệm lần 3

Như đã nói ở trên, trong lần thực nghiệm 2, học sinh đã thất bại trong việc đọc thông tin từ đồ thị cho trước để lập bảng biến thiên, và lẽ tất nhiên, họ cũng sẽ thất bại trong bài toán 2. Do đó, trong lần thực nghiệm ba này, chúng tôi tìm cách cung cấp thông tin cho học sinh dưới dạng các ví dụ có lời giải. Một ví dụ minh họa việc xét tính đồng biến, nghịch biến bằng đồ thị, một ví dụ minh họa việc xét tính đồng biến, nghịch biến bằng cách lập tỉ số trích từ các ví dụ trong SGK đại số 10 nâng cao.

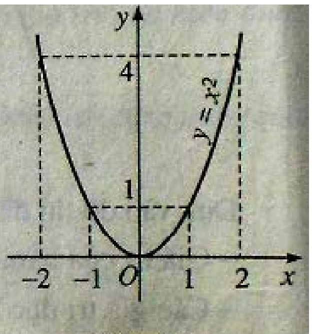
Trong câu hỏi về việc khảo sát sự biến thiên, chúng tôi dùng lại thuật ngữ khảo sát sự biến thiên vì lí do thuật ngữ khảo sát sự biến thiên xuất hiện trong 2 ví dụ gợi ý.

Sau đây là câu hỏi thực nghiệm lần 3:

Quan sát các ví dụ sau đây trong SGK đại số 10 – Nâng cao rồi giải bài tập cho bên dưới.

1. Ví dụ 3, trang 38

• Trong ví dụ 3, ta thấy hàm số $y = x^2$ nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty\,;\,0]$ và đồng biến trên nửa khoảng $[0\,;\,+\infty)$. Qua đồ thị của nó (h. 2.2) ta thấy : Từ trái sang phải, nhánh trái của parabol (ứng với $x \in (-\infty\,;\,0]$) là đường cong đi xuống, thể hiện sự nghịch biến của hàm số ; nhánh phải của parabol (ứng với $x \in [0\,;\,+\infty)$) là đường cong đi lên, thể hiện sự đồng biến của hàm số.



Hình 2.2

2. Ví dụ 4, trang 39

Ví dụ 4. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x) = ax^2$ (với $a > 0$) trên mỗi khoảng $(-\infty\,;\,0)$ và $(0\,;\,+\infty)$.

Giải. Với hai số x_1 và x_2 khác nhau, ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1),$$

suy ra $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1).$$

Do $a > 0$ nên :

– Nếu $x_1 < 0$ và $x_2 < 0$ thì $a(x_2 + x_1) < 0$; điều đó chứng tỏ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty\,;\,0)$;

– Nếu $x_1 > 0$ và $x_2 > 0$ thì $a(x_2 + x_1) > 0$; điều đó chứng tỏ hàm số đồng biến trên khoảng $(0\,;\,+\infty)$. □

39

Em hãy giải bài toán dưới đây. Nếu không làm được em hãy nêu những khó khăn khiến em không thể giải bài toán này.

Ghi chú: Nếu cần sử dụng giấy nháp, các em hãy nháp vào mặt sau của tờ giấy này

Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{4 - (x-1)^2}$

a. Chứng minh đồ thị của hàm số trên là một nửa đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó. (*gợi ý: chứng minh* $y^2 + (x-1)^2 = 4$)

b. Hãy khảo sát sự biến thiên của hàm số đã cho.

Việc cho học sinh nháp vào mặt sau phiếu thực nghiệm giúp chúng tôi thấy rõ hơn các bước hình thành chiến lược của học sinh.

Thực nghiệm đã được tiến hành trên 49 học sinh của lớp 11A2 trường THPT Ngô Quyền.

Sau đây là kết quả thực nghiệm lần 3:

Bảng 2.1.4: Thống kê câu trả lời của học sinh lớp 11A2

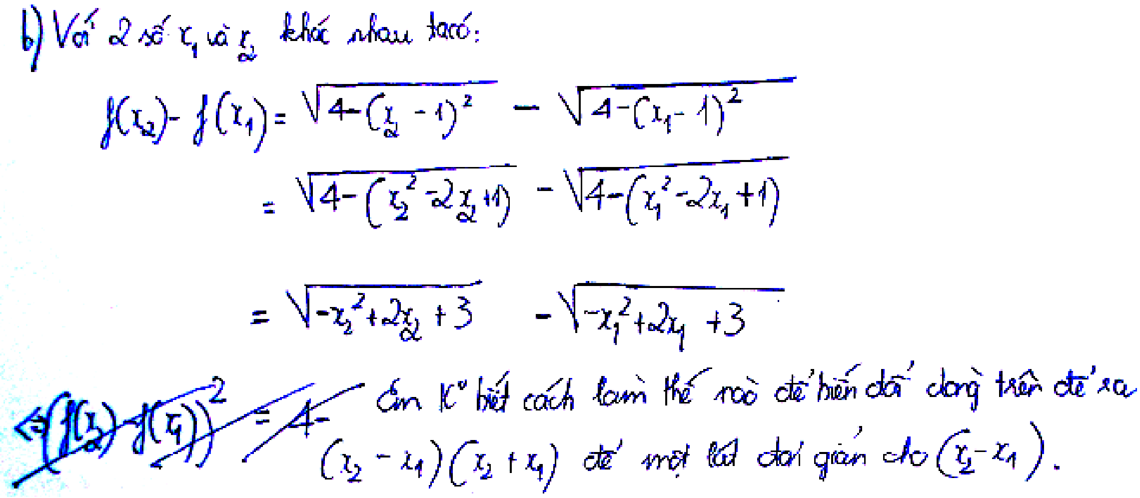
	Chiến lược đại số	Chiến lược đồ thị	Không trả lời	Hiểu sai yêu cầu
Số lượng	37/49 hs (76%)	17/49 hs (35%)	2/49 hs (4%)	2/49 hs (4%)
Tỉ lệ thành công	0/49 hs	13/49 hs	0/49 hs	0/49 hs

Phân tích chi tiết các thông tin từ các phiếu thực nghiệm:

- Đối với các học sinh giải bằng chiến lược đại số, không có học sinh nào đưa ra được kết quả đúng, họ đều thất bại trong việc thiết lập tỉ số $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Khó khăn này được thể hiện trong các bài làm của học sinh như sau:

+ Khó khăn do không rút gọn được biểu thức:

Lời giải của học sinh có số thứ tự 29:



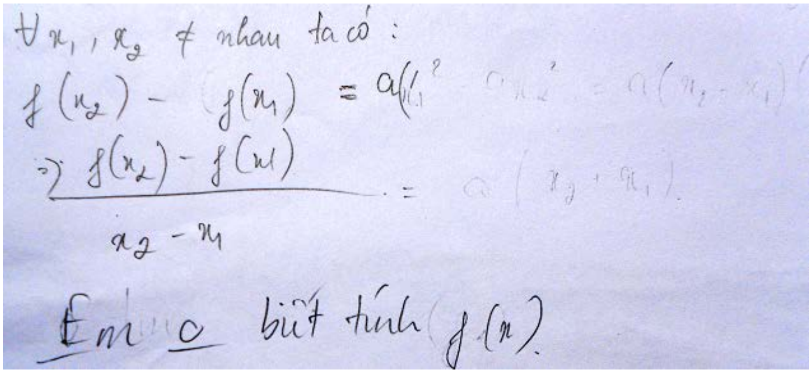
b) Với 2 số x_1 và x_2 khác nhau ta có:

$$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{4-(x_2-1)^2} - \sqrt{4-(x_1-1)^2}$$
$$= \sqrt{4-(x_2^2-2x_2+1)} - \sqrt{4-(x_1^2-2x_1+1)}$$
$$= \sqrt{-x_2^2+2x_2+3} - \sqrt{-x_1^2+2x_1+3}$$

$\cancel{\Leftrightarrow (f(x_2)-f(x_1))^2 = 4}$ Em k° biết cách làm thế nào để biến đổi dòng trên để ra $(x_2-x_1)(x_2+x_1)$ để một lát đơn giản cho (x_2-x_1).

+ Khó khăn do không biết cách thay x_1 ; x_2 vào biểu thức:

Lời giải của học sinh có số thứ tự 24:



$\forall x_1, x_2 \neq$ nhau ta có:

$f(x_2) - f(x_1) = a(x_1^2$

$\Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$

Em k° biết tính $f(x)$

- Trong số 17 học sinh giải bằng chiến lược đồ thị thì có 13 học sinh đưa ra được kết quả đúng. Điều đó chứng tỏ học sinh đã vận dụng được chiến lược đồ thị để giải quyết hiệu quả bài toán trên. Sau đây là một lời giải tiêu biểu:

Lời giải của học sinh có số thứ tự 19:

b. $\forall x_1, x_2$ khác nhau ta có:

~~$f(x_1).f(x_2) = \sqrt{4-(x_1-1)^2}\sqrt{4-(x_2-1)^2}$~~

$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{4-(x_1-1)^2} - \sqrt{4-(x_2-1)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{f(x_2)-f(x_1)} = 4 - (x_2-1) - 2(x_1-1)$

$= 4 - x_2 + 1 - 2x_1 + 1$

$\Leftrightarrow \quad = -x_2 + x_1 \qquad \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = (-x_2+x_1)^2$

Nữa $\qquad = x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2$

ĐK: TXĐ $\Leftrightarrow 4-(x-1)^2 \geq 0$

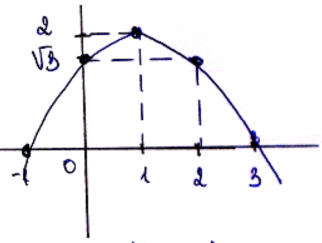
$\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 4$

$\Leftrightarrow x-1 \leq \pm 2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 \leq 2 \\ x-1 \leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 3 \\ x \geq -1 \end{array}\right.$

BBT:

x	-1	0	1	2	3
y	0 ↗	$\sqrt{3}$ ↗	2 ↘	$\sqrt{3}$ ↘	0



Hàm số $y = \sqrt{4-(x-1)^2}$ đồng biến trên đoạn $[-1;1)$ vì nhánh trái parabol là đường cong đi lên

Hàm số $y = \sqrt{4-(x-1)^2}$ nghịch biến trên đoạn $(1;3]$ vì nhánh phải là đường cong đi xuống

Từ bài làm này ta cũng thấy học sinh đã sử dụng chiến lược đại số trước khi sử dụng chiến lược hình học. Điều đó chứng tỏ sự ảnh hưởng của chiến lược đại số đến nhận thức của học sinh, tuy nhiên, khi gặp khó khăn trong việc tính toán, họ đã biết cách chuyển sang chiến lược khác, cụ thể trong trường hợp này là chiến lược hình học. Trong số các bài làm, chúng tôi ghi nhận được 9 bài làm như trên, nghĩa là sử dụng chiến lược đại số trước và khi gặp khó khăn, họ chuyển sang chiến lược hình học.

- Đối với học sinh không đưa ra được lời giải, khó khăn của học sinh được thể hiện trong bài làm sau:

Lời giải của học sinh có số thứ tự 14:

b) Em không giải được ở bước: định hướng bài làm.
em không tìm thấy cách giải và không hiểu tại sao đồ thị $g(x)$ là nửa đường tròn và gợi ý gì cho câu b)
nên không giải được

Như vậy, họ không sử dụng được chiến lược đại số, tuy nhiên họ không hiểu gợi ý của câu a có tác dụng gì cho câu b nên không đưa ra được lời giải.

- Có 2 học sinh hiểu sai đề, từ lời giải của họ, có thể dự đoán họ hiểu rằng việc khảo sát sự biến thiên nghĩa là đi khảo sát các tính chất của hàm số như giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, tính đối xứng …

Kết quả thực nghiệm cho thấy, có những học sinh đã biết thay đổi từ chiến lược đại số sang chiến lược hình học trong việc giải quyết bài toán đặt ra.

Kết luận thực nghiệm 1

Sau ba lần thực nghiệm, chúng tôi rút ra mấy kết luận sau:

Thể chế chưa tạo đủ điều kiện để hình thành kĩ năng khảo sát sự biến thiên của hàm số bằng đồ thị ở học sinh. Kĩ thuật đại số vẫn chiếm ưu thế. Vì vậy, học sinh không thể áp dụng kĩ thuật đồ thị trong bài toán khảo sát đồ thị hàm số. Tuy nhiên, khi được cung cấp thông tin về việc có hai kĩ thuật để khảo sát sự biến thiên của hàm số và cho ví dụ rõ ràng cách thức thực hiện hai kĩ thuật đó, học sinh đã bước đầu biết thay đổi từ kĩ thuật đại số sang kĩ thuật hình học (đồ thị). Như vậy, có những học sinh đã bước đầu biết chuyển đổi qua lại giữa hai hệ thống biểu đạt hàm số là hệ thống biểu đạt đại số sang hệ thống biểu đạt bằng đồ thị trong việc giải toán.

2.2. Thực nghiệm 2

2.2.1. Mục đích thực nghiệm

Thực nghiệm 2 có mục đích tìm hiểu việc ứng dụng phép tịnh tiến đồ thị trong việc vẽ đồ thị hàm số ở học sinh. Nghĩa là tìm kiếm các yếu tố cho phép trả lời câu hỏi: *Kĩ năng vẽ đồ thị hàm số bằng phép biến đổ đồ thị, đặc biệt là phép tịnh tiến có thật sự được hình thành ở học sinh hay không?*

2.2.2. Hình thức thực nghiệm

Thực nghiệm được tiến hành trên đối tượng học sinh lớp 12 học theo chương trình nâng cao tại thời điểm học sinh đã được học hết bài khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của một số hàm đa thức. Câu hỏi thực nghiệm sẽ được phát cho học sinh dưới dạng một bài kiểm tra 15 phút, thời gian thực nghiệm là 15 phút.

2.2.3. Phân tích tiên nghiệm câu hỏi thực nghiệm

a. Xây dựng câu hỏi thực nghiệm

Câu hỏi thực nghiệm được xây dựng dựa trên sự lựa chọn của các biến tình huống sau:

+ Các biến liên quan đến bản chất của hàm số và đồ thị.

- Hàm số có thuộc các dạng mà việc khảo sát và vẽ đồ thị được đề cập trong chương trình và SGK hay không?
- Mối liên hệ đại số được thể hiện rõ ràng hay không?
- Tọa độ các điểm đặc biệt mà đồ thị hàm số đi qua là nguyên hay không nguyên?

+ Các biến liên quan đến hình thức câu hỏi.

- Đồ thị hàm số gốc có được cho trước hay không?
- Mặt phẳng tọa độ có được kẻ ô vuông hay không?

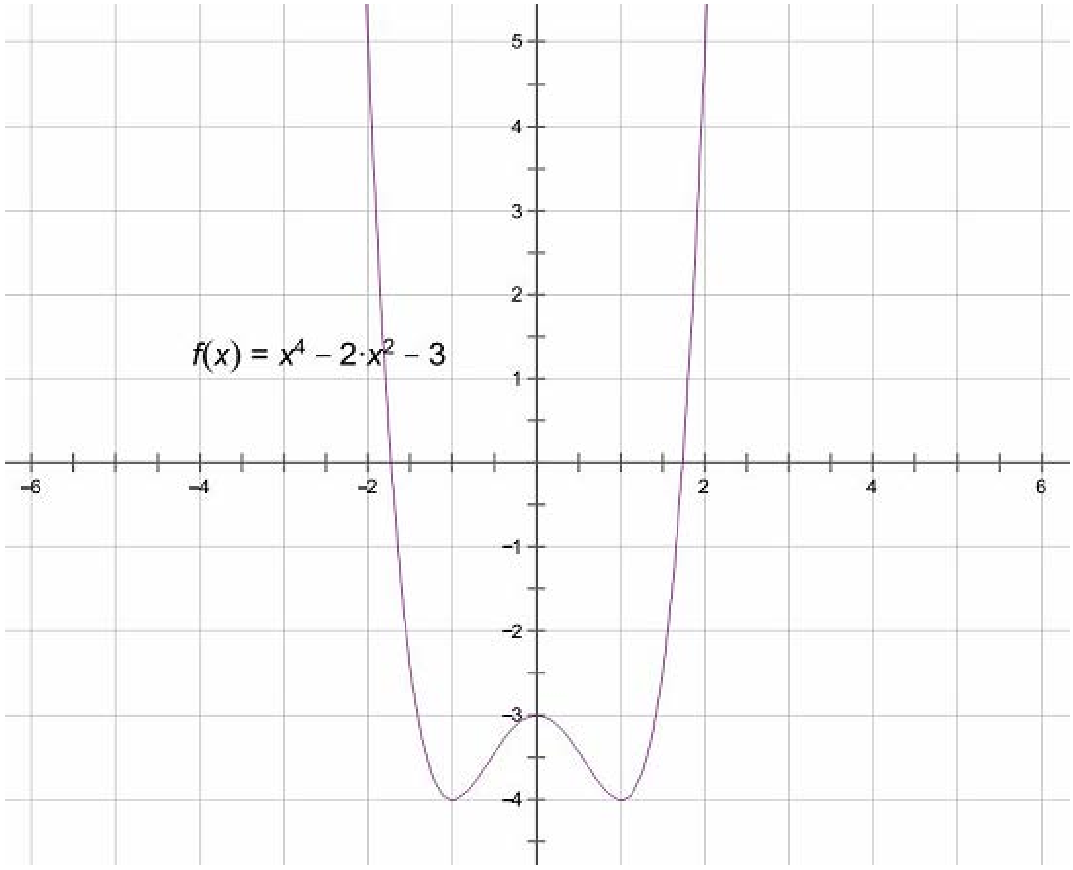
+ Các biến liên quan đến kiến thức của học sinh.

- Học sinh đã học những phép biến đổi đồ thị nào?

b. Câu hỏi thực nghiệm

Cho hàm số $y = f\left(x\right) = x^4 - 2x^2 - 3$ có đồ thị như hình vẽ

Vẽ đồ thị của hàm số $y = g\left(x\right) = \left(x - \sqrt{2}\right)^4 - 2\left(x - \sqrt{2}\right)^2 - 3$ trên cùng mặt phẳng tọa độ cho bên dưới.



c. Phân tích các chiến lược

Chiến lược 1: Khai triển để khảo sát.

$$y = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 12x^2 - 8\sqrt{2}x + 4$$

$$\Rightarrow y' = 4x^3 - 12\sqrt{2}x^2 + 24x - 8\sqrt{2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -1 + \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-1+\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y’		–	0	+	0	–	0	+	
y	$+\infty$		- 4		- 3		- 4		$+\infty$

Đồ thị:

Chiến lược 2: Dùng đạo hàm hàm hợp.

$$y' = 4\left(x-\sqrt{2}\right)^3 - 4\left(x-\sqrt{2}\right) = 4\left(x-\sqrt{2}\right)\left[\left(x-\sqrt{2}\right)^2 - 1\right]$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -1+\sqrt{2} \\ x = 1+\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Làm giống chiến lược 1

Chúng tôi gọi chung chiến lược 1 và chiến lược 2 là **chiến lược đạo hàm.**

Chiến lược 3: Dùng phép tịnh tiến đồ thị.

Vì $g(x) = f\left(x-\sqrt{2}\right)$ nên đồ thị hàm số g có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số f sang phải $\sqrt{2}$ đơn vị. Từ đó suy ra đồ thị hàm số g

Chiến lược 4: Dùng phép tịnh tiến hệ trục tọa độ.

Lấy $I\left(\sqrt{2};0\right)$ thì phương trình của đường cong $y = g(x)$ trong hệ tọa độ IXY là:

$Y - 0 = g\left(X+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow Y = X^4 - 2X^2 - 3 = f(X)$. Do đó, đồ thị hàm số g trong hệ tọa độ IXY chính là đồ thị hàm số f trong hệ tọa độ Oxy.

Chúng tôi gọi chung chiến lược 3 và chiến lược 4 là **chiến lược tịnh tiến.**

d. Phân tích ảnh hưởng của các biến đến các chiến lược

- Ảnh hưởng của các biến liên quan đến bản chất hàm số và đồ thị hàm số:
    - Hàm đa thức bậc 4 tổng quát không được đề cập đến trong chương trình và SGK, tuy nhiên, hàm số đa thức bậc 3 và hàm số đa thức bậc 4 trùng phương được trình bày rất chi tiết trong SGK. Do đó, việc chọn hàm số đa thức bậc bốn tạo cho học sinh cảm giác giải được (ít nhất là bằng cách đạo hàm tương tự như các hàm số đa thức khác).
    - Tọa độ các điểm đặc biệt mà đồ thị hàm số g đi qua là các số vô tỷ sẽ gây khó khăn cho chiến lược đạo hàm. Điều này giúp học sinh điều chỉnh sang chiến lược tịnh tiến.
    - Mối liên hệ đại số giữa hai hàm số thể hiện rất rõ ràng nhằm tạo điều kiện thuận lợi cho chiến lược tịnh tiến xuất hiện.

- Ảnh hưởng của các biến liên quan đến hình thức câu hỏi.
    - Việc cho trước đồ thị hàm số f tạo điều kiện thuận lợi cho chiến lược tịnh tiến xuất hiện.
    - Mặt phẳng tọa độ được kẻ ô vuông giúp việc dịch chuyển các điểm được thực hiện dễ dàng hơn.
- Ảnh hưởng của các biến liên quan đến kiến thức của học sinh.
    - Tại thời điểm thực nghiệm, học sinh đã được học tất cả các phép biến đổi đồ thị. Hơn nữa, phép tịnh tiến hệ trục tọa độ vừa được học xong tạo điều kiện cho chiến lược tịnh tiến, đặc biệt là chiến lược tịnh tiến hệ trục tọa độ xuất hiện.

Từ những phân tích trên cho thấy, chiến lược tịnh tiến là chiến lược tối ưu trong bài toán này.

2.2.4. Phân tích hậu nghiệm

2.2.4.1. Thực nghiệm lần 1

Thực nghiệm lần 1 được tiến hành trên 94 học sinh thuộc hai lớp 12A1 và 12A2 trường THPT Ngô Quyền tại TPHCM. Đối tượng học sinh thuộc hai lớp trên là đối tượng học sinh khá giỏi với điểm trung bình môn Toán từ 8 trở lên.

Từ các bài làm của học sinh, chúng tôi ghi nhận được một chiến lược không nằm trong các chiến lược được dự đoán ở phân tích tiên nghiệm. Lời giải của chiến lược đó như sau:

Xét hàm số $y = g(x) = \left(x - \sqrt{2}\right)^4 - 2\left(x - \sqrt{2}\right)^2 - 3$.

Đặt $t = \left(x - \sqrt{2}\right)^2$ thì ta được $y = t^2 - 2t - 3$.

$y' = 2t - 2$. $y' = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 + \sqrt{2}$

….

Chúng tôi gọi chiến lược trên là chiến lược “đặt ẩn phụ”. Lời giải theo chiến lược này có thể là do ảnh hưởng từ việc đặt ẩn phụ trong các bài toán giải phương trình.

Sau đây là thống kê số câu trả lời thu được từ thực nghiệm.

Bảng 2.2.1: Thống kê tổng số câu trả lời ở cả hai lớp 12A1 và 12A2

	Chiến lược đạo hàm	Chiến lược tịnh tiến đồ thị	Chiến lược tịnh tiến hệ trục	Chiến lược đặt ẩn phụ
Số lượng	49/94 hs (52%)	8/94 hs (9%)	9/94 hs (10%)	28/94 hs (30%)
Tỉ lệ thành công	1/94 hs	0/94 hs	1/94 hs	0/94 hs

Các thông tin khác thu được từ thực nghiệm:

- Đa số các học sinh sử dụng chiến lược đạo hàm hàm hợp cũng như chiến lược khai triển rồi đạo hàm đều gặp khó khăn chung là không thể lập được bảng giá trị do tính toán quá phức tạp, chỉ có 2 học sinh lập được bảng giá trị, trong đó chỉ có 1 học sinh vẽ được đồ thị.
- Trong số các lời giải theo chiến lược tịnh tiến, sai lầm thường xảy ra ở các em là việc xác định sai vectơ tịnh tiến. Chỉ có 1 lời giải xác định đúng vectơ và vẽ đúng đồ thị hàm số.

Những thông tin từ thực nghiệm cho ta thấy:

Vẫn có tới 52% học sinh sử dụng phương pháp đạo hàm thông thường cho bài toán đưa ra mặc dù gặp phải trở ngại do tính toán gây ra. Điều này cho thấy sự ảnh hưởng thói quen khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bằng công cụ đạo hàm ở học sinh lớp 12.

Có 19% học sinh biết sử dụng phép biến đổi đồ thị trong việc vẽ đồ thị hàm số. Trong đó có 9% học sinh sử dụng phép tịnh tiến đồ thị, 10% học sinh sử dụng phép tịnh tiến hệ trục tọa độ. Như vậy, việc cho trước đồ thị hàm số gốc đã có tác dụng gợi ý cho các em sử dụng phép tịnh tiến, điều này chứng tỏ việc vẽ đồ thị hàm số bằng phép tịnh tiến hiện diện ở học sinh, tuy nhiên phép tịnh tiến vẫn chưa thực sự là công cụ vẽ đồ thị ở học sinh vì đa số học sinh vẫn xác định sai vectơ tịnh tiến, đồng thời họ chưa biết cách vẽ ảnh của đồ thị qua phép tịnh tiến. Điều này chứng tỏ thể chế chưa tạo đủ những điều kiện cần thiết cho học sinh trong việc chiếm lĩnh tri thức về phép tịnh tiến.

Vấn đề đặt ra tiếp theo cho chúng tôi là: có thể bổ sung yếu tố gì vào bài toán thực nghiệm để học sinh có thể vận dụng được phép tịnh tiến vào việc vẽ đồ thị hàm số. Dựa trên những khó khăn của học sinh trong việc vận dụng phép tịnh tiến, chủ yếu là xác định sai vectơ tịnh tiến và không biết cách vẽ đồ thị ảnh, chúng tôi bổ sung thêm bài toán giúp hình thành biểu thức của phép tịnh tiến đồ thị trước khi cho học sinh giải quyết bài toán vẽ đồ thị bằng phép tịnh tiến.

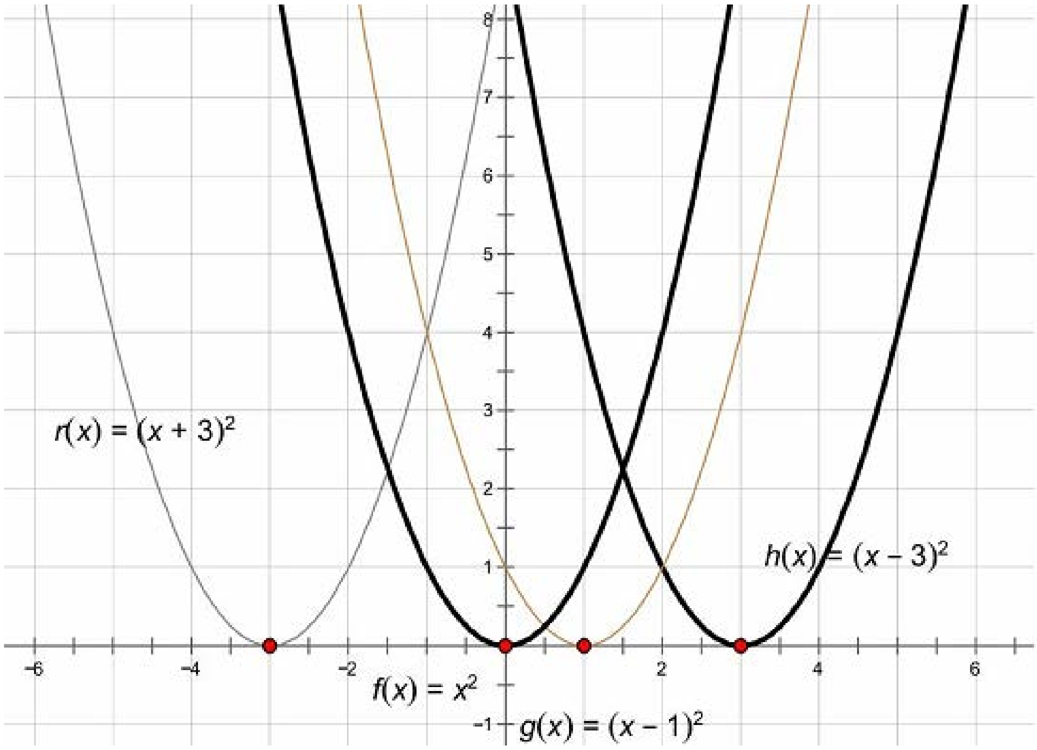
2.2.4.2. Thực nghiệm lần 2

Thực nghiệm lần 2 được tiến hành trên 50 học sinh lớp 12A1 tại trường THPT Ngô Quyền. Đây là lớp đã được chọn để thực nghiệm lần 1.

Sau đây là câu hỏi thực nghiệm (xem phụ lục 5).

Bài 1:

a. Dưới đây là hình vẽ đồ thị của các hàm số $y = x^2; y = (x-1)^2$; $y = (x-3)^2$; $y = (x+3)^2$



Dựa vào hình vẽ, hãy xác định cách thức dịch chuyển đồ thị hàm số $y = x^2$ để thu được đồ thị các hàm số $y = (x-1)^2$; $y = (x-3)^2$; $y = (x+3)^2$ bằng cách điền vào chỗ trống:

Đồ thị hàm số $y = (x-1)^2$ thu được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $y = x^2$

....

Đồ thị hàm số $y = (x-3)^2$ thu được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $y = x^2$

....

Đồ thị hàm số $y = (x+3)^2$ thu được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $y = x^2$

....

b. Tổng quát, cho số k > 0.

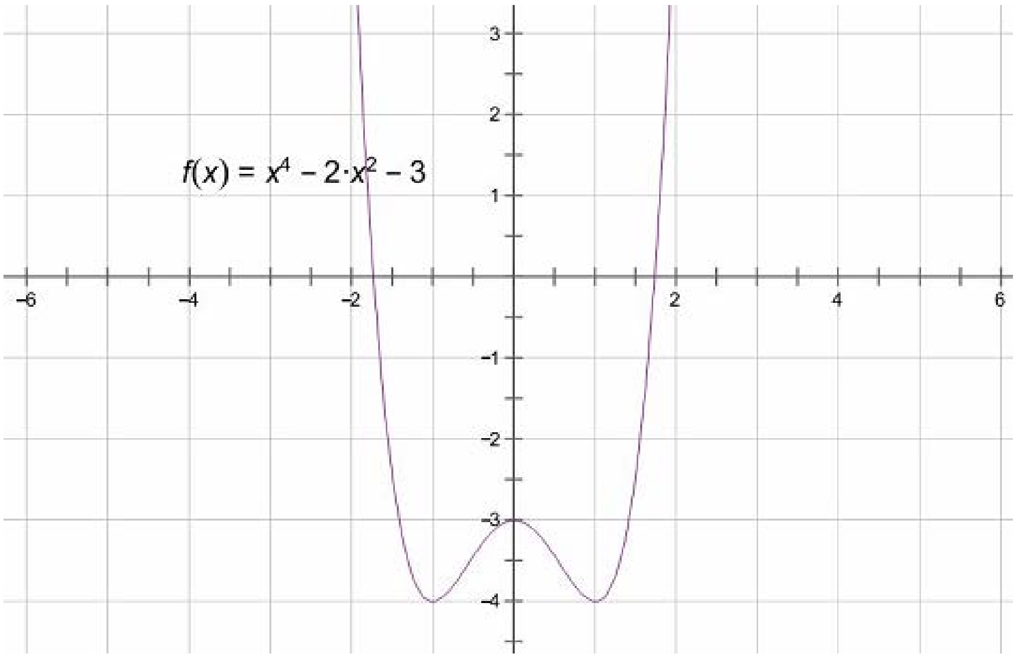
Đồ thị hàm số $y = f(x-k)$ thu được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $y = f(x)$..

Đồ thị hàm số $y = f(x+k)$ thu được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $y = f(x)$..

Bài 2:

Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ có đồ thị như hình vẽ

Vẽ đồ thị của hàm số $y = g(x) = \left(x-\sqrt{2}\right)^4 - 2\left(x-\sqrt{2}\right)^2 - 3$ trên cùng mặt phẳng tọa độ cho bên dưới. Giải thích cách vẽ của em.



Sau đây là thống kê chi tiết kết quả thực nghiệm lần 2 tại lớp 12A1.

Đối với bài 1, tất cả các học sinh đều đưa ra câu trả lời và đều làm đúng. Sau đây là bảng thống kê kết quả của bài 2.

Bảng 2.2.2: Thống kê tổng số câu trả lời ở lớp 12A1

	Chiến lược đạo hàm	Chiến lược tịnh tiến đồ thị	Chiến lược tịnh tiến hệ tọa độ	Bỏ trống
Số lượng	3/50 hs (6%)	39/50 hs (78%)	1/50 hs (2%)	7/50 hs (14%)
Tỉ lệ thành công	0/50 hs	36/50 hs	1/50 hs	0/50 hs

Các thông tin khác thu được từ thực nghiệm:

- Các học sinh giải bằng chiến lược đạo hàm đều không thể vẽ được đồ thị hàm số.
- Trong số 39 học sinh sử dụng chiến lược tịnh tiến đồ thị, có 36 học sinh vẽ đúng đồ thị hàm số, còn lại 3 học sinh xác định đúng phép tịnh tiến nhưng không vẽ được đồ thị.
- Học sinh giải bằng chiến lược tịnh tiến hệ tọa độ vẽ được đồ thị.

Kết quả thực nghiệm cho thấy, bằng cách bổ sung các tình huống xây dựng phép tịnh tiến bằng hình vẽ minh họa, học sinh đã hiểu rõ phép tịnh tiến đồ thị và vận dụng được trong việc vẽ đồ thị hàm số chúng tôi đưa ra.

Kết luận thực nghiệm 2

Từ hai lần thực nghiệm, chúng tôi rút ra mấy kết luận sau:

Một bộ phận học sinh đã biết vai trò của phép tịnh tiến trong việc vẽ đồ thị, tuy nhiên, thể chế chưa tạo được điều kiện thuận lợi cho kĩ năng vẽ đồ thị bằng phép tịnh tiến được hình thành thật sự ở học sinh. Vì vậy, họ vẫn chưa thành công trong việc vẽ đồ thị bằng phép tịnh tiến.

Bằng cách bổ sung một số yếu tố của môi trường giúp xây dựng phép tịnh tiến đồ thị thông qua nhiều hình vẽ minh họa, học sinh đã hiểu rõ mối liên hệ giữa việc biến đổi đại số với việc biến đổi hình học thông qua phép tịnh tiến, và do đó, họ đã vận dụng được phép tịnh tiến trong việc vẽ đồ thị.

Như vậy, nếu tạo được điều kiện thuận lợi (tương tự như cách làm của chúng tôi), kĩ năng vẽ đồ thị bằng phép tịnh tiến hoàn toàn có thể hình thành ở học sinh.

KẾT LUẬN

Từ những phân tích về đồ thị hàm số và phép biến đổi đồ thị trong thể chế dạy học Toán THPT Việt Nam cũng như các kết quả thu được từ các thực nghiệm cho phép

chúng tôi đưa ra các câu trả lời thỏa đáng cho những câu hỏi đặt ra từ đầu luận văn, đồng thơi trả lời được các câu hỏi nghiên cứu đặt ra trong quá trình phân tích. Cụ thể, các kết quả đó được thể hiện như sau:

1. Về mối liên hệ giữa hệ thống biểu đạt đại số và hệ thống biểu đạt đồ thị

Mối liên hệ giữa hệ thống biểu đạt đại số và hệ thống biểu đạt bằng đồ thị được thể hiện trong bảng sau:

Tính chất của hàm số thể hiện bởi biểu thức đại số	**Tính chất của hàm số thể hiện qua đồ thị hàm số**
$y_0 = f(x_0)$ (với $x_0 \in D$)[1]	Điểm $(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị của hàm số.
$f(x) > 0, \forall x \in K$ [2]	Đồ thị của hàm số nằm phía trên trục hoành khi $x \in K$.
$f(x) < 0, \forall x \in K$	Đồ thị của hàm số nằm phía dưới trục hoành khi $x \in K$.
Hàm số đồng biến trên *K*: $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.	Trên *K*, đồ thị của hàm số đi lên (theo chiều tăng của đối số).
Hàm số nghịch biến trên *K*: $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.	Trên *K*, đồ thị của hàm số đi xuống (theo chiều tăng của đối số).
Hàm số không đổi trên *K*: $y = m$ (m là hằng số).	Đồ thị của hàm số nằm trên đường thẳng song song (hoặc trùng) với trục hoành.
$y = f(x)$ là hàm số chẵn: $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$	Đồ thị hàm số có trục đối xứng là trục tung.
$y = f(x)$ là hàm số lẻ: $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$	Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là gốc tọa độ.

Dựa vào mối liên hệ giữa đồ thị hàm số và biểu thức đại số, SGK đã đưa ra các kiểu nhiệm vụ liên quan đến việc xét tính chẵn – lẻ, xét dấu của biểu thức, xác định giá

[1] $y = f(x)$ là một hàm số với tập xác định D.

[2] K là một khoảng (nửa khoảng hay đoạn) nằm trong D.

trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số và khảo sát sự biến thiên của hàm số bằng đồ thị. Tuy nhiên, trong các bài tập của SGK, yếu tố đồ thị luôn được cho trước. Từ đó dẫn chúng tôi đến câu hỏi nghiên cứu:

Trong trường hợp đồ thị hàm số không được cho trước, học sinh có biết tự vẽ đồ thị rồi sử dụng đồ thị hàm số trong việc xét dấu biểu thức, xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất và đặc biệt là tính đồng biến – nghịch biến của hàm số hay không?

Kết quả từ ba lần thực nghiệm câu hỏi nghiên cứu trên cho phép chúng tôi rút ra kết luận: Trong trường hợp đồ thị hàm số không được cho trước, học sinh không biết tự vẽ đồ thị hàm số rồi sử dụng đồ thị hàm số như một công cụ giải toán. Tuy nhiên, bằng cách bổ sung các yếu tố gợi ý, đã có những học sinh biết chuyển đổi từ kĩ thuật đại số sang kĩ thuật đồ thị. Điều đó chứng tỏ việc chuyển đổi từ hệ thống biểu đạt đại số sang hệ thống biểu đạt đồ thị rồi từ đó vận dụng vào việc giải toán hoàn toàn có thể hình thành ở học sinh.

2. Về phép biến đổi đồ thị

Phép biến đổi đồ thị thể hiện mối liên hệ giữa các đồ thị hàm số với nhau và mối liên hệ giữa việc biến đổi đại số với việc biến đổi hình học.

Các phép biến đổi đồ thị được đề cập đến trong chương trình và SGK là: phép tịnh tiến đồ thị, phép đối xứng trục, phép co dãn theo phương trục tung và trục hoành, phép tịnh tiến hệ tọa độ. Trong đó, phép tịnh tiến đồ thị và phép tịnh tiến hệ trục tọa độ đóng vai trò quan trọng trong chương trình và SGK.

- **Phép tịnh tiến đồ thị:**

Phép tịnh tiến đồ thị đóng vai trò trong việc nghiên cứu đồ thị hàm số bậc hai. Cụ thể, nhờ công thức của phép tịnh tiến đồ thị, người ta có thể tìm được biểu thức đại số của ảnh của một đồ thị qua phép tịnh tiến, xác định được phép tịnh tiến biến đồ thị hàm số này thành đồ thị hàm số kia và mô tả đồ thị hàm số bậc hai. Ngoài ra, phép tịnh tiến đồ thị cũng ứng dụng trong việc vẽ đồ thị hàm số thể hiện qua việc vẽ đồ thị các hàm số lượng giác trong SGK Đại số và giải tích 11. Tuy nhiên, các bài tập về vẽ đồ thị hàm số bằng phép tịnh tiến đồ thị xuất hiến hiếm hoi trong SGK ở cả ba lớp.

❖ **Phép tịnh tiến hệ trục tọa độ:**

Phép tịnh tiến hệ trục tọa độ cho thấy mối liên hệ giữa biểu thức đại số của hai hàm số có cùng một đường biểu diễn đồ thị trong hai hệ trục tọa độ khác nhau.

Ứng phép tịnh tiến hệ trục tọa độ, người ta có thể xác định tâm cũng như trục đối xứng của một đường cong có phương trình cho trước. Tuy nhiên, SGK chưa thể hiện việc ứng dụng phép tịnh tiến đồ thị trong việc vẽ đồ thị hàm số.

Từ những nhận định trên, một câu hỏi được đặt ra là:

Kĩ năng vẽ đồ thị hàm số bằng phép biến đổ đồ thị, đặc biệt là phép tịnh tiến có thật sự được hình thành ở học sinh hay không?

Kết quả của hai lần thực nghiệm cho thấy, một bộ phận học sinh đã biết vai trò của phép tịnh tiến trong việc vẽ đồ thị, tuy nhiên, thể chế chưa tạo được điều kiện thuận lợi cho kĩ năng vẽ đồ thị bằng phép tịnh tiến được hình thành thật sự ở học sinh. Vì vậy, họ vẫn chưa thành công trong việc vẽ đồ thị bằng phép tịnh tiến. Tuy nhiên, ta hoàn toàn có thể xây dựng các tình huống giúp học sinh hiểu rõ mối liên hệ giữa các đồ thị hàm số thông qua phép tịnh tiến, từ đó giúp học sinh hình thành kĩ năng vẽ đồ thị hàm số bằng phép tịnh tiến.

3. Những hạn chế và hướng mở ra của luận văn

Luận văn chưa thực hiện được một phân tích so sánh giữa thể chế dạy học ở một nước thực hiện tốt việc xây dựng các phép biến đổi đồ thị với thể chế dạy học trong nước cũng như chưa xây dựng được một đồ án dạy học giúp học sinh chiếm lĩnh và ứng dụng được các tri thức liên quan đến phép biến đổi đồ thị, đặc biệt là phép tịnh tiến trong việc nghiên cứu hàm số cũng như đồ thị của hàm số. Đồng thời, một nghiên cứu sâu hơn về vai trò của đồ thị hàm số trong việc nghiên cứu các khái niệm liên quan đến hàm số cũng là một việc làm cần thiết. Những vấn đề trên cũng là một hướng nghiên cứu mới mở ra từ luận văn này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

TIẾNG VIỆT

[1] BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO (2006), *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán,* NXB Giáo dục.

[2] VĂN NHƯ CƯƠNG (Chủ biên) (2006), *Bài tập hình học 10 nâng cao,* NXB Giáo dục.

[3] VĂN NHƯ CƯƠNG (Chủ biên) (2007), *Bài tập hình học 11 nâng cao*, NXB Giáo dục.

[4] NGUYỄN THỊ HỒNG DUYÊN (2012), *Sự chuyển đổi hệ thống biểu đạt trong dạy học hàm số ở lớp 12*, Luận văn thạc sĩ, Trường Đại học sư phạm TP.Hồ Chí Minh.

[5] NGUYỄN HUY ĐOAN (Chủ biên) (2006), *Bài tập Đại Số 10 Nâng Cao*, NXB Giáo dục.

[6] NGUYỄN HUY ĐOAN (Chủ biên) (2007), *Bài tập Đại Số và giải tích 11 Nâng Cao*, NXB Giáo dục.

[7] NGUYỄN HUY ĐOAN (Chủ biên) (2008), *Bài tập giải tích 12 Nâng Cao*, NXB Giáo dục.

[8] TRẦN VĂN HẠO (Tổng chủ biên) (2006), *Đại số 10,* NXB Giáo dục.

[9] TRẦN VĂN HẠO (Tổng chủ biên) (2007), *Đại số và Giải tích 11,* NXB Giáo dục.

[10] TRẦN VĂN HẠO (Tổng chủ biên) (2008), *Giải tích 12,* NXB Giáo dục.

[11] TRẦN VĂN HẠO (Tổng chủ biên) (2007), *Hình học 11*, NXB Giáo dục.

[12] TRẦN VĂN HẠO (Tổng chủ biên) (2006), *Sách giáo viên Đại số 10,* NXB Giáo dục.

[13] TRẦN VĂN HẠO (Tổng chủ biên) (2007), *Sách giáo viên Đại số và Giải tích 11,* NXB Giáo dục.

[14] TRẦN VĂN HẠO (Tổng chủ biên) (2008), *Sách giáo viên Giải tích 12,* NXB Giáo dục.

[15] TRẦN VĂN HẠO (Tổng chủ biên) (2007), *Sách giáo viên hình học 11*, NXB Giáo dục.

[16] NGUYỄN MỘNG HY (Chủ biên) (2007*), Bài tập hình học 11*, NXB Giáo dục.

[17] NGUYỄN NGỌC KIÊN (2010), *Tiếp cận khái niệm hàm số với casyopee*, Khóa luận tốt nghiệp đại học, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh.

[18] ĐOÀN QUỲNH (Tổng chủ biên) (2006) , *Đại số 10 Nâng Cao*, NXB Giáo dục.

[19] ĐOÀN QUỲNH (Tổng chủ biên) (2007), *Đại số và giải tích 11 Nâng cao*, NXB Giáo dục.

[20] ĐOÀN QUỲNH (Tổng chủ biên) (2008), *Giải tích 12 Nâng cao*, NXB Giáo dục.

[21] ĐOÀN QUỲNH (Tổng chủ biên) (2007), *Hình học 11 nâng cao*, NXB Giáo dục.

[22] ĐOÀN QUỲNH (Tổng chủ biên) (2006), *Sách giáo viên Đại số 10 Nâng Cao*, NXB Giáo dục.

[23] ĐOÀN QUỲNH (Tổng chủ biên) (2007), *Sách giáo viên Đại số và giải tích 11 Nâng cao*, NXB Giáo dục.

[24] ĐOÀN QUỲNH (Tổng chủ biên) (2008), *Sách giáo viên Giải tích 12 Nâng cao*, NXB Giáo dục.

[25] ĐOÀN QUỲNH (Tổng chủ biên) (2007), *Sách giáo viên hình học 11 nâng cao*, NXB Giáo dục.

[26] BÙI ANH TUẤN (2007), *Biểu diễn đồ thị hàm số và nghiên cứu đường cong qua phương trình của nó*, Luận văn thạc sĩ, Trường Đại học Sư phạm TP.Hồ Chí Minh.

[27] VŨ TUẤN (Chủ biên) (2006), *Bài tập Đại số 10*, NXB Giáo dục.

[28] VŨ TUẤN (Chủ biên) (2007), *Bài tập Đại số và giải tích 11*, NXB Giáo dục.

[29] VŨ TUẤN (Chủ biên) (2008), *Bài tập Giải tích 12,* NXB Giáo dục.

SONG NGỮ PHÁP – VIỆT

[30] Annie Bessot, Claude Comiti, Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến (2009), *Những yếu tố cơ bản của Didactic Toán (Éléments fondamentaux de Didactique des Mathématiques),* NXB Đại học quốc gia TP.Hồ Chí Minh.

PHỤ LỤC

Phụ lục 1: Phiếu câu hỏi thực nghiệm 1 lần 1

Trường : ....

STT: ....

Các em trả lời độc lập bài tập sau trong 15 phút.

Bài làm này không chấm điểm nhưng giúp thầy cô điều chỉnh việc dạy học cho tốt hơn.

Cảm ơn sự giúp đỡ của các em

Cho hàm số $y = f\left(x\right) = \sqrt{4 - \left(x - 1\right)^2}$

a. Tìm tập xác định của hàm số.

b. Chứng minh đồ thị của hàm số trên là một nửa đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó. (*gợi ý: chứng minh* $y^2 + \left(x - 1\right)^2 = 4$)

c. Khảo sát sự biến thiên của hàm số đã cho trên tập xác định.

Phụ lục 2: Phiếu câu hỏi thực nghiệm 1 lần 2

Trường : ....

STT: ....

Các em trả lời độc lập các bài tập sau trong 30 phút.

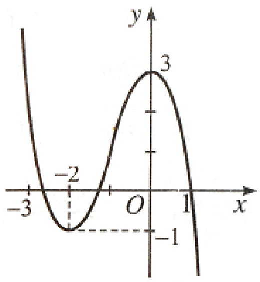
Bài làm này không chấm điểm nhưng giúp thầy cô điều chỉnh việc dạy học cho tốt hơn.

Cảm ơn sự giúp đỡ của các em.

Bài 1:

a. (Trích bài 3, SGK đại số 10 – NC, trang 45):

Hình 2.9 là đồ thị của một hàm số có tập xác định là R. Dựa vào đồ thị, hãy lập bảng biến thiên của hàm số đó.



Hình 2.9

b. (Trích bài 4, SGK đại số 10 – NC, trang 45):

Khảo sát sự biến thiên của hàm số sau và lập bảng biến thiên của nó:

$y = x^2 + 2x - 2$ trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

<u>Bài làm</u>

Bài 2: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{4-(x-1)^2}$

a. Chứng minh đồ thị của hàm số trên là một nửa đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó. (*gợi ý: chứng minh* $y^2 + (x-1)^2 = 4$)

b. Lập bảng biến thiên của hàm số trên.

Bài làm

Phụ lục 3: Phiếu câu hỏi thực nghiệm 1 lần 3

Trường : ....

STT: ....

Các em trả lời độc lập các bài tập sau trong 35 phút.

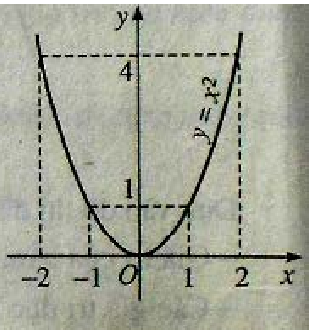
Bài làm này không chấm điểm nhưng giúp thầy cô điều chỉnh việc dạy học cho tốt hơn.

Cảm ơn sự giúp đỡ của các em.

Quan sát các ví dụ sau đây trong SGK đại số 10 – Nâng cao rồi giải bài tập cho bên dưới.

1. Ví dụ 3, trang 38

• Trong ví dụ 3, ta thấy hàm số $y = x^2$ nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty ; 0]$ và đồng biến trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$. Qua đồ thị của nó (h. 2.2) ta thấy : Từ trái sang phải, nhánh trái của parabol (ứng với $x \in (-\infty ; 0]$) là đường cong đi xuống, thể hiện sự nghịch biến của hàm số ; nhánh phải của parabol (ứng với $x \in [0 ; +\infty)$) là đường cong đi lên, thể hiện sự đồng biến của hàm số.



Hình 2.2

2. Ví dụ 4, trang 39

Ví dụ 4. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x) = ax^2$ (với $a > 0$) trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(0 ; +\infty)$.

Giải. Với hai số x_1 và x_2 khác nhau, ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1),$$

suy ra $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1).$$

Do $a > 0$ nên :

– Nếu $x_1 < 0$ và $x_2 < 0$ thì $a(x_2 + x_1) < 0$; điều đó chứng tỏ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$;

– Nếu $x_1 > 0$ và $x_2 > 0$ thì $a(x_2 + x_1) > 0$; điều đó chứng tỏ hàm số đồng biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$. □

39

Em hãy giải bài toán dưới đây. Nếu không làm được em hãy nêu những khó khăn khiến em không thể giải bài toán này.
Ghi chú: Nếu cần sử dụng giấy nháp, các em hãy nháp vào mặt sau của tờ giấy này

Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{4-(x-1)^2}$

a. Chứng minh đồ thị của hàm số trên là một nửa đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó. (*gợi ý: chứng minh* $y^2 + (x-1)^2 = 4$)

b. Hãy khảo sát sự biến thiên của hàm số đã cho.

Phụ lục 4: Phiếu câu hỏi thực nghiệm 2 lần 1

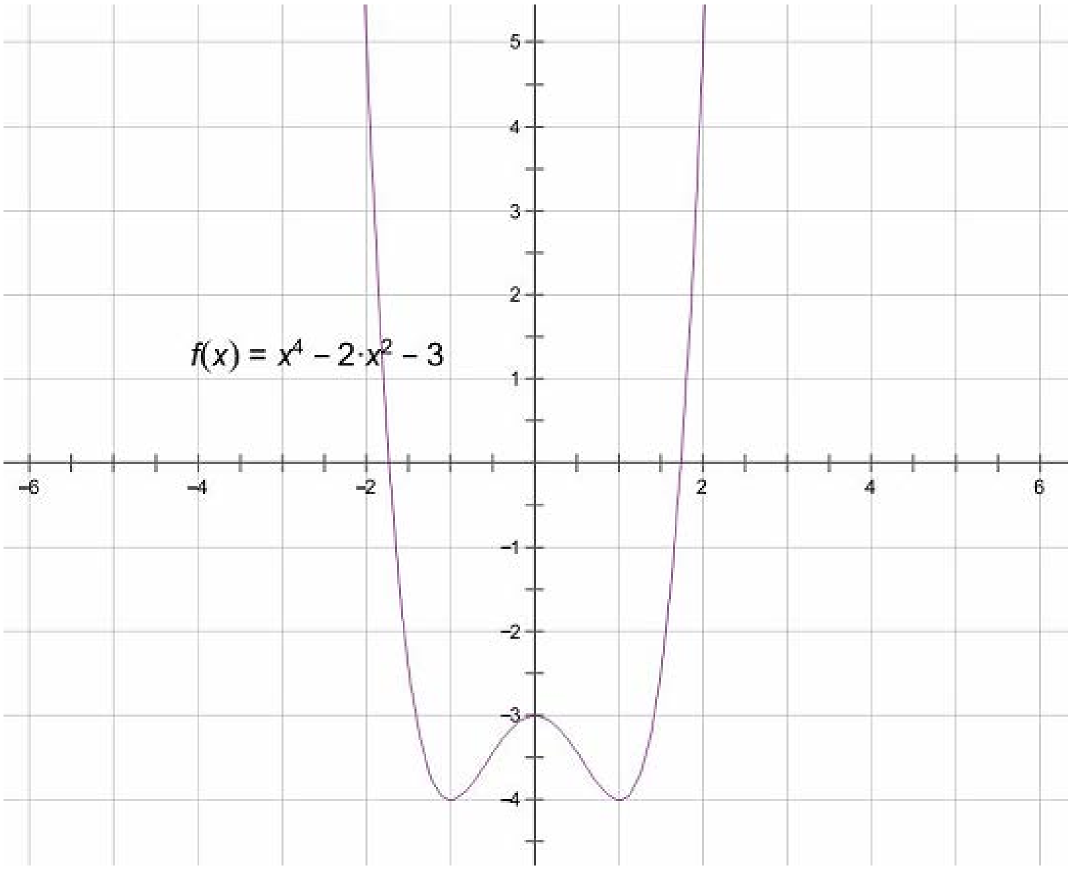
Trường : ....

STT: ....

KIỂM TRA 15 PHÚT

Cho hàm số $y = f\left(x\right) = x^4 - 2x^2 - 3$ có đồ thị như hình vẽ

Vẽ đồ thị của hàm số $y = g\left(x\right) = \left(x - \sqrt{2}\right)^4 - 2\left(x - \sqrt{2}\right)^2 - 3$ trên cùng mặt phẳng tọa độ cho bên dưới. Giải thích cách vẽ của em.



Phụ lục 5: Phiếu câu hỏi thực nghiệm 2 lần 2

Trường : ....

STT: ....

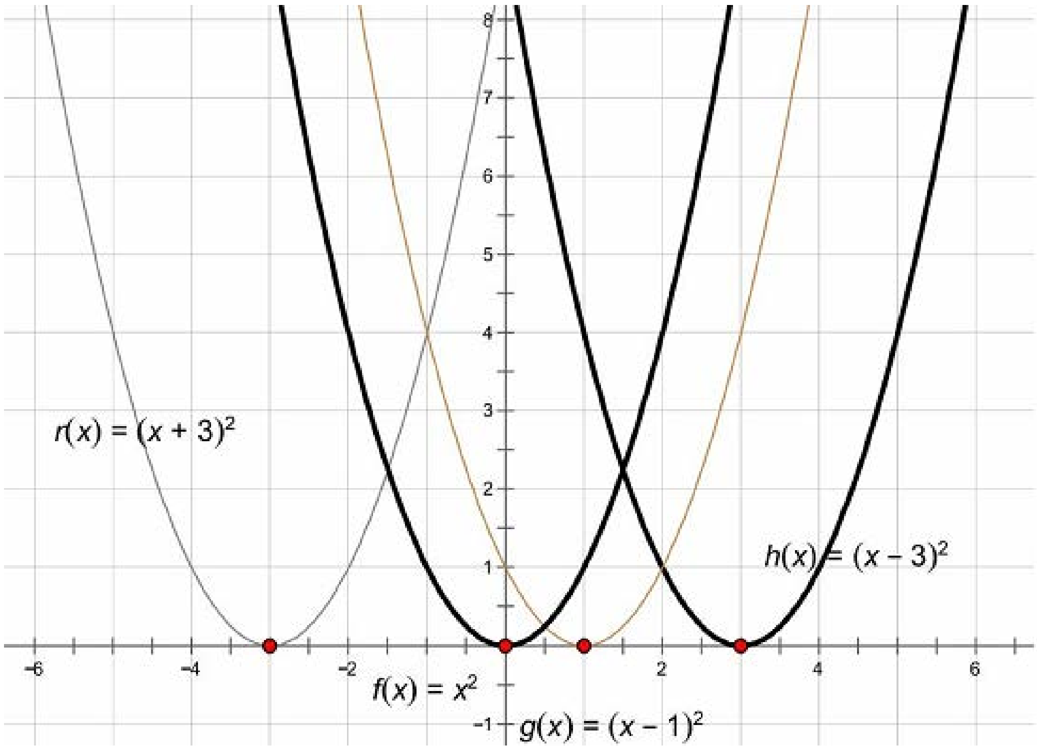
Các em trả lời độc lập các bài tập sau trong 35 phút.

Bài làm này không chấm điểm nhưng giúp thầy cô điều chỉnh việc dạy học cho tốt hơn.

Cảm ơn sự giúp đỡ của các em.

Bài 1:

a. Dưới đây là hình vẽ đồ thị của các hàm số $y = x^2$; $y = (x-1)^2$; $y = (x-3)^2$; $y = (x+3)^2$



Dựa vào hình vẽ, hãy xác định cách thức dịch chuyển đồ thị hàm số $y = x^2$ để thu được đồ thị các hàm số $y = (x-1)^2$; $y = (x-3)^2$; $y = (x+3)^2$ bằng cách điền vào chỗ trống:

Đồ thị hàm số $y = (x-1)^2$ thu được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $y = x^2$

....

Đồ thị hàm số $y = (x-3)^2$ thu được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $y = x^2$

....

Đồ thị hàm số $y=(x+3)^2$ thu được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $y=x^2$

....

b. Tổng quát, cho số k > 0.

Đồ thị hàm số $y=f(x-k)$ thu được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $y=f(x)$ ....

Đồ thị hàm số $y=f(x+k)$ thu được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $y=f(x)$ ....

Bài 2:

Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^2-3$ có đồ thị như hình vẽ

Vẽ đồ thị của hàm số $y=g(x)=\left(x-\sqrt{2}\right)^4-2\left(x-\sqrt{2}\right)^2-3$ trên cùng mặt phẳng tọa độ cho bên dưới. Giải thích cách vẽ của em.