

ANNALE DU BAC

Moumouni
Namory

TRAORE
SIDIBE

Prof au LPK
Prof au LAM

MATHEMATIQUES TOME 1

TERMINALES
SET, MTI, MTCG.

EDT : Ismaïla KEITA
Rue : 208 Porte N° : 326 Lafiabougou
Tel : 29.12.21 BP.E4461

2001 - 2002

ANNALE DU BAC

Moumouni
Namory

TRAORE
SIDIBE

Prof au LPK
Prof au LAM

MATHEMATIQUES TOME 1

**TERMINALES
SET, MTI, MTCG.**

EDT : Ismaïla KEITA
Rue : 208 Porte N° : 326 Lafiabougou
Tel : 29.12.21 BP.E4461

2001 - 2002

~ AVANT – PROPOS ~

Cette brochure a été conçue en deux tomes pour aider les élèves de la terminales SET, MTI, MTGC, quel que soit leur niveau, à améliorer leurs performances.

Des exercices classiques, entièrement résolus permettent de tester l'ensemble des thèmes du chapitre :

Notre souhait est que ce livre, ainsi conçu, puisse rendre les mathématiques accessibles à bon nombres d'élèves.

Nous aimerons recevoir les critiques et suggestions des différents lecteurs de cet ouvrage qui est le tome 1 afin d'améliorer sa qualité

LES AUTEURS

Namory SIDIBE	LAM
Moumouni TRAORE	LPK

~ SOMMAIRE ~

RESUME3 - 33

NOMBRES COMPLEXES

Enoncés.....35 - 40

Solutions.....41 - 52

ARITHMETIQUE

Enoncés.....54 - 58

Solutions.....59 - 70

SUITES NUMERIQUES

Enoncés.....72 - 79

Solutions.....80 - 96

FONCTIONS NUMERIQUES

Enoncés.....98 - 107

Solutions.....108 - 116

FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

Enoncés.....117 - 125

Solutions.....126 - 146

GEOMETRIE

Enoncés.....147 - 155

Quelques Solutions.....156 - 159

ENSEMBLE C DES NOMBRES COMPLEXES**DEFINITION :**

On appelle nombre complexe, tout nombre qui peut s'écrire sous la forme $a + bi$ avec a et b deux réels et $i^2 = -1$.

- * Soit $Z = a + bi$ un nombre complexe non nul, la formule algébrique de Z est $Z = a + bi$
- * Si $Z = a + bi$ est un complexe alors son conjugué est $\bar{Z} = a - bi$
- * Un nombre complexe est réel si et seulement si il est égal à son conjugué ; il est imaginaire pure si et seulement son conjugué est égal à son opposé
- * Si $Z = a + bi$, on appelle module de Z le réel $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{Z \cdot \bar{Z}}$
- * $|Z| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$; $|Z \cdot Z'| = |Z| \cdot |Z'|$; $\left| \frac{Z}{Z'} \right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$; $|Z^n| = |Z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

PROPRIETES :

Soit $Z = a + bi$ un nombre complexe non nul. P le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$

* Le point $M(a, b)$ du plan P est appelé le point image de $Z = a + bi$; le vecteur $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est appelé le vecteur image de Z et Z est l'abscisse de M et de \vec{w} .

$$(\vec{u}, O\vec{M}) = \theta ; \text{ on a aussi } \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|Z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|Z|} \end{cases}$$

- $\arg(Z \cdot Z') = \arg Z + \arg Z'$; $\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg Z - \arg Z'$; $\arg Z^n = n \arg Z$; $\arg \frac{1}{Z} = -\arg(Z)$
- Si M et M' sont deux points d'abscisses respectives Z et Z' alors $OM \perp OM' \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^*, Z = kiZ'$
- * Soit A, B, C sont 3 points d'abscisses respectives a, b, c alors $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \arg \frac{c-a}{b-a}$ avec $A \neq B, A \neq C$
- Soit A, B, C et D 4 points du plan d'abscisses respectives Z_A, Z_B, Z_C, Z_D ; ces 4 points sont cocycliques (appartiennent à un même cercle) ou alignés si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\arg \frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = \arg \frac{Z_B - Z_D}{Z_A - Z_D} + k\pi \Leftrightarrow (\vec{CA}, \vec{CB}) = (\vec{DA}, \vec{DB}) + k\pi$$
- * Soit Z un nombre complexe de module r dont un argument est θ , alors forme trigonométrique de Z est $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$
- **Formule de Moivre :** Soit $Z = re^{i\theta}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors

$$Z^n = r^n e^{in\theta} = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$
- * **Formule de linéarisation**

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} ; \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} ; \cos^n \theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} ; \sin^n \theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$$
- * Soit $A = a \cos X + b \sin X$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $Z = a + bi = re^{i\theta}$ alors $A = r \cos(x - \theta)$
- Soit $Z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et n un nombre entier naturel non nul alors les n racines $n^{\text{èmes}}$ de Z sont $Z_k = \sqrt[n]{r} \cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$ avec $k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$

N.B: Les n racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe non nul sont représentées par n points distincts situés sur un même cercle de centre O (origine du repère) et de rayon $\sqrt[n]{r}$

ARITHMETIQUE**I. L'ENSEMBLE \mathbb{N} DES ENTIERS NATURELS**

L'ensemble des nombres entiers naturels est $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

* L'addition et la multiplication sont des lois de composition interne associatives et commutatives dans \mathbb{N} .

- \mathbb{N} est un ensemble totalement ordonné par la relation « \leq »
- $\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $nb > a$; on dit que \mathbb{N} est archimédien.
- Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un élément minimum
- Toute partie non vide et majorée de \mathbb{N} admet un élément maximum.

* **Raisonnement par récurrence**

- **Théorème 1 de récurrence** : Soit P une propriété sur \mathbb{N} et n_0 un entier naturel, si :

- i) la proposition $P(n_0)$ est vraie
- ii) l'implication $[\forall n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ est vraie

alors la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 .

- **Théorème 2 de récurrence** : Soit P une propriété et n_0 un entier naturel ; si :

- i) les propositions $P(n_0)$ et $P(n+1)$ sont vraies
- ii) l'implication $[\forall n \geq n_0, P(n) \text{ et } P(n+1) \Rightarrow P(n+2)]$ est vraie

alors la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 .

* **Division euclidienne dans \mathbb{N}**

- Quels que soient le nombre entier naturel a et le nombre entier naturel non nul b , il existe un unique couple (q, r) de nombres entiers naturels tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$: q est appelé quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b .

* **Système de numération**

- Soit x un entier naturel supérieur ou égale à 2, on appelle système de numération de base x une technique de représentation des entiers naturels utilisant x symboles appelés chiffres.

- Soit x un entier naturel supérieur ou égale à 2. Tout entier naturel $a \geq x$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $a = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ avec $0 < a_n < x$ et

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, (n-1)\} \quad 0 < a_i < x$$

On dit alors que a est développé suivant les puissances de x . Par convention l'entier a s'écrit :

$$a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \text{ dans le système de numération de base } x.$$

II. L'ENSEMBLE \mathbb{Z} DES ENTIERS RELATIF OU RATIONNELS

L'ensemble $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$; il contient \mathbb{N} .

* Si a et b sont deux entiers rationnels avec $b \neq 0$ alors il existe un couple unique (q, r) d'entiers rationnels tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$.

• Si b est un entier rationnel, on appelle multiple de b tout entier rationnel a qui peut s'écrire $a = kb$ où $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des multiples de b est noté $b\mathbb{Z}$.

* On dit que l'entier rationnel non nul b est un diviseur de a ou que b divise a si et seulement si a est un multiple de b .

1) **Relation de congruence modulo n dans \mathbb{Z}**

Soit n un entier naturel rationnel non nul, la relation R définie dans \mathbb{Z} par $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, xRy \Leftrightarrow$

$(x - y) \in n\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence appelée relation de congruence modulo n . On note :

$$x \equiv y[n] \Leftrightarrow (x - y) \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = y + kn$$

Propriétés

* Soit n un entier naturel non nul. Quels que soient x et y deux entiers rationnels, x est congru à y modulo n si et seulement si x et y ont le même reste dans la division euclidienne par n .

* Soit n et k deux entiers naturels non nuls. Quels que soient les entiers relatifs x, y, x' et y' :

$$- (x \equiv x' [n] \text{ et } y \equiv y' [n]) \Leftrightarrow (x + y \equiv (x' + y') [n])$$

$$- (x \equiv x' [n] \text{ et } y \equiv y' [n]) \Leftrightarrow (xy \equiv x'y' [n])$$

$$- (x \equiv x' [n]) \Leftrightarrow (x^k \equiv x'^k [n])$$

$$- (x \equiv x' [n]) \Leftrightarrow (kx \equiv kx' [kn])$$

* Soit n un entier naturel non nul. S'il existe deux entiers naturels p et q tels que $0 < p < n$ et $n = pq$ alors p et q sont des diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +, \times)$ n'est pas dans ce cas intègre.

2) P.G.C.D – P.P.C.M**- P.G.C.D**

Définition : Soit a et b deux entiers relatifs non nuls, on appelle PGCD de a et b l'entier naturel non nul d qui engendre $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

Propriétés :

* Si a et b sont deux entiers relatifs non nuls et $k \in \mathbb{N}$ alors :

$$- \text{PGCD}(|a|, |b|) = \text{PGCD}(a, b)$$

$$- \text{PGCD}(ka, kb) = k \cdot \text{PGCD}(a, b)$$

$$* \text{ Si } a \neq b \text{ alors } \text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a - b, b) = \text{PGCD}(b - a, a)$$

$$* \text{ Si } a = bq + r \text{ avec } a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \text{ et } 0 < r < b \text{ alors } \text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$$

$$* \text{ Si } b \text{ divise } a \text{ alors } \text{PGCD}(a, b) = b$$

* Deux entiers non nuls a et b sont dits étrangers (ou premiers entre deux) si et seulement si $\text{PGCD}(a, b) = 1$

* Si a et b sont deux entiers étrangers tout diviseur de l'un est étranger à l'autre.

* Trois entiers a, b, c sont dits étrangers ou premiers dans leur ensemble si et seulement si $\text{PGCD}(a, b, c) = 1$

Théorème de Bezout : Deux entiers naturels a et b sont étrangers si et seulement s'il existe au moins deux entiers rationnels u et v tels que $au + bv = 1$ (identité de Bezout)

Théorème de Gauss : Si a, b, c sont trois entiers rationnels tel que c divise le produit ab et c étranger à a , alors c divise b .

- P.P.C.M.

Définition : Soit a et b deux entiers relatifs non nuls ; on appelle PPCM de a et b le plus petit entier naturel non nul de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$

Propriétés : Soit a et b deux entiers rationnels non nuls et $k \in \mathbb{N}$

$$* \text{PPCM}(|a|, |b|) = \text{PPCM}(a, b)$$

$$* \text{PPCM}(ka, kb) = k \cdot \text{PPCM}(a, b)$$

$$* \text{PPCM}(a, b) \times \text{PGCD}(a, b) = ab \Leftrightarrow \text{PPCM}(a, b) = \frac{ab}{\text{PGCD}(a, b)}$$

$$* \text{ Si } \text{PGCD}(a, b) = d \text{ alors } \exists a' \in \mathbb{N}, \exists b' \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } a = da'; b = db' ;$$

$$\text{PPCM}(a, b) = da'b' \text{ et } \text{PGCD}(a', b') = 1$$

3) Nombres Premiers

Définition : Un entier rationnel a , non nul et différent de 1 est dit premier si et seulement si l'ensemble de ses diviseurs dans \mathbb{N} est $\{a, 1\}$

Propriétés

* Si a est un entier naturel strictement supérieur à 1 et si a n'est pas premier alors il admet au moins un diviseur premier dont le carré est inférieur à a .

- Un nombre entier a strictement supérieur à 1 est premier si et seulement si $\forall b \in \mathbb{Z}$
 $\text{PGCD}(a, b) = 1$ ou $\text{PGCD}(a, b) = a$.

Si $a \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ alors il existe une suite unique croissante finie $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ de nombres premiers et une unique suite (k_1, k_2, \dots, k_n) d'éléments de \mathbb{N}^* telles que : $a = a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdot \dots \cdot a_n^{k_n}$.

- * Un élément x de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est régulier (ou inversible) si et seulement si $\text{PGCD}(x, n) = 1$
- * $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +, \cdot)$ est un corps si et seulement si n est premier.

SUITES NUMERIQUES

Définition :

On appelle suite numérique une application d'un sous ensemble de \mathbb{N} vers \mathbb{R}

Propriétés

Soit (U_n) et (V_n) deux suites numériques ; m et M deux nombres réels. I une partie non vide de \mathbb{N} .

* (U_n) est dite croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $\forall n \in I ; U_{n+1} > U_n$ (respectivement $U_{n+1} < U_n$)

* La suite (U_n) est dite minorée par m (respectivement majorée par M) sur I si $\forall n \in I ; m \leq U_n$ (respectivement $U_n \leq M$)

Si (U_n) est majorée et minorée sur I alors elle est dite bornée sur I .

* Toute suite croissante et majorée (respectivement décroissante et minorée) est convergente.

Théorème des gendarmes :

Soient (U_n) , (V_n) et (W_n) trois suite numérique telles que $U_n \leq V_n \leq W_n$; si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l$

* Deux suites (U_n) et (V_n) sont dites adjacentes si et seulement si (U_n) est croissante, (V_n) est décroissante et $\forall n \in I, U_n \leq V_n$.

- Si (U_n) et (V_n) sont deux suite adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

* Une suite numérique (U_n) sur I est dite arithmétique si elle est définie par son premier terme et la relation de récurrence : $\forall n \in I, U_{n+1} = U_n + r$ où r est une constante réelle appelée la raison.

* Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r alors $\forall n \in I :$

$$- U_n = U_a + (n - a)r$$

$$- S_n = U_a + U_{a+1} + \dots + U_n = \frac{n-a+1}{2}(U_a + U_n) = \frac{n+1-a}{2}(2U_a + (n-a)r)$$

- Une suite arithmétique est stationnaire si seulement si sa raison est nulle : Dans ce cas elle est convergente.

- Trois réel a, b, c sont dans cet ordre les 3 premiers termes d'une suite arithmétique si et seulement si $a + c = 2b$

* Une suite numérique (U_n) sur I est dite géométrique si elle définie par son premier terme et la relation de récurrence : $\forall n \in I ; U_{n+1} = qU_n$ où q est constante réelle appelée la raison.

* Si (U_n) est une suite géométrique de raison q alors $\forall n \in I ; \forall a \in I U_n = q^{n-a} \cdot U_a$;

$$- S_n = U_a + U_{a+1} + \dots + U_n = \frac{U_a(1 - q^{n-a+1})}{1 - q} \text{ avec } q \neq 1. \quad S_n = \frac{U_a - U_{n+1}}{1 - q}$$

- Si $|q| < 1$ alors (U_n) converge vers zéro et dans ce cas la somme S_n converge $\frac{U_a}{1 - q}$

- Si $q = 1$ alors (U_n) est stationnaire ; dans ce cas $S_n = (n + 1 - a)U_a$.

- Trois nombres a, b, c sont dans cet ordre en progression géométrique si et seulement si $ac = b^2$.

FONCTIONS NUMERIQUES

I . LIMITE – CONTINUITE

Soit f une fonction numérique à variable

On appelle ensemble de définition de f , l'ensemble des réels x qui ont une image par f .

* Soit f une fonction numérique définie dans un voisinage du réel x_0 ; si f admet une limite en x_0 alors elle est unique.

* Soit f et g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0 tel que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1$

alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

* Soit f , g et h trois fonctions telles que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$

* Soit f une fonction numérique définie sur D et C sa courbe représentative :

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à C parallèle à l'axe des ordonnées.

- Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y_0$ ($y_0 \in \mathbb{R}$) alors la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote à C parallèle à l'axe des abscisses.

- Si $f(x) = ax + b + l(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow \infty} l(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à C

* Soit f une fonction numérique définie sur D et x_0 un réel de D ; f est continue en x_0 si et seulement si :

- $f(x_0)$ existe

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

* Soit f et g deux fonctions numériques; si g est continue en x_0 et f continue en $g(x_0)$ alors $f \circ g$ est continue en x_0 .

* Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ alors l'image de $[a; b]$ par f est $f([a; b]) = [A; B]$

* Si f est continue sur $[a; b]$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors il existe au moins un réel $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

* Si de plus f est monotone sur $[a; b]$ alors il existe un réel unique $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = 0$.

* Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ alors f réalise une bijection de

$[a; b] \rightarrow f([a; b]) = [A; B]$ sa bijection réciproque $f^{-1}: [A; B] \rightarrow [a; b]$ est aussi continue et strictement monotone sur $[A; B]$.

II . DERIVABILITE

Définition :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle centré en x_0 , f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un réel a et une fonction ε tel que : $f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

Si f est dérivable en x_0 alors le réel $a = f'(x_0)$ est appelé nombre dérivé de f en x_0 .

Propriétés :

* Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 ; la réciproque n'est pas vraie.

* Soit f et g deux fonctions numériques telles g soit dérivable en x_0 et f dérivable en $g(x_0)$ alors $(f \circ g)$ est dérivable en x_0 et on a $(f \circ g)'(x_0) = (f' \circ g)(x_0) \cdot g'(x_0)$

- Soit f est une bijection de $I \rightarrow J$, dérivable sur I et f' non nulle sur I

$$\forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

- Notation** : Les dérivées d'ordre $n (n \geq 1)$ de f sont notées $\frac{d^n f}{dx^n}$

Par Exemple $f' = \frac{df}{dx}$, $f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}$, $f''' = \frac{d^3 f}{dx^3}$

- Inégalité des accroissements finis** : Soit f une fonction numérique dérivable sur $[a; b]$ avec $a < b$ tel que il existe deux réels m et M vérifiant pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f' \leq M$, alors on a :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

- Autre formulation** : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit M un réel positif. Si pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$ alors $\forall x \in I, \forall y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

- Propriétés de la courbe \mathcal{C} de f**

Soit f une fonction numérique, D son domaine de définition et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

- S'il existe $x_0 \in D$ tel que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$ ou $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty$ alors \mathcal{C} admet au point A d'abscisse x_0 une parallèle à l'axe $(o; \vec{j})$ (tangente verticale)

S'il $x_0 \in D$ tel que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a_1 (a_1 \in \mathbb{R})$; $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a_2 (a_2 \in \mathbb{R})$ avec

$a_1 \neq a_2$ alors \mathcal{C} admet un point A x_0 2 demi-tangentes de coefficients directeurs respectifs a_1 et a_2 : on dit dans ce cas que A est un point anguleux de \mathcal{C} .

- Si f est deux fois dérivable en x_0 et f' s'annule en changeant de signe au point x_0 alors \mathcal{C} présente en ce point un point d'inflexion.

III . FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

A. FONCTIONS LOGARITHMES

- On appelle fonction logarithme népérien la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ qui prend la valeur zéro

en 1 ; on la note \ln et on a : $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ avec $\ln 1 = 0$

- Propriétés** :

- La fonction logarithme népérien est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$; on a $\ln x' = \frac{1}{x}$

- La fonction \ln réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} elle est strictement croissante : $\forall a > 0; \forall b > 0$: $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b ; \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b ; \ln a^n = n \ln a \text{ avec } n \in \mathbb{Q}$$

- Si u est une fonction dérivable et non nulle sur I alors $\forall x \in I, (\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Si $r \in \mathbb{Q}^*$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^r \ln x = 0$

- Si u est une fonction non nulle sur I alors les primitives sur I de la fonction $f: x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont

$F: x \mapsto \ln|u(x)| + k$ avec k un réel.

* Si a est un réel strictement positif et différent de 1 alors on appelle logarithme de base a , la fonction définie par : $\log_a: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

- lorsque $a = 10$, la fonction logarithme de base 10 est appelée fonction logarithme décimal.

Le logarithme décimal d'un réel positif x est noté $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

N.B : On a $\ln x = \ln 10 \cdot \log x$; une valeur approchée de $\ln 10$ est 2,30 et $\frac{1}{\ln 10} = 0,43$ d'où $\ln x = 2,3 \cdot \log x$ et $\log x = 0,43 \cdot \ln x$

B. FONCTION EXPONENTIELLES

* Définition :

On appelle fonction exponentielle népérien ou fonction exponentielle de base e la fonction réciproque du logarithme népérien. Elle est définie sur \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{R}_+^* .

L'image d'un réel x par la fonction exponentielle est notée $\exp(x)$ ou e^x

* Propriétés :

- La fonction exponentielle définit une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R}_+^* donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$

- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$; $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$

- Si $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ alors $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$

- **Propriétés fondamentales :** On sait que pour tout réels strictement positifs a et b $\ln ab = \ln a + \ln b$ d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

Conséquences :

- Si n est un nombre rationnel alors $(e^x)^n = e^{nx}$

- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$; $\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$

La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et $(e^x)' = e^x$; si u est dérivable sur I alors

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)} \quad \forall x \in I$$

* Calcul de limites :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

* Croissance comparée des fonctions de référence :

- Pour r réel $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r \cdot e^{-x} = 0$
- Pour $a > 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{\ln x} = +\infty$; pour $r > 0$ et $a > 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^r} = +\infty$
- Fonction puissance : La réciproque du logarithme de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$) est la fonction exponentielle de base a : on a $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+$, $x = \log_a y \Leftrightarrow y = \exp_a x$
- On note $a^x = e^{x \ln a}$. La fonction puissance se comporte comme la fonction exponentielle.

PRIMITIVES – CALCUL INTEGRAL**Définition :**

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I c'est à dire des fonctions de la forme $F + k$ où F est dérivable de dérivée f , et k une constante réelle.

Calcul :

a) Si u' et v' sont les fonctions dérivées respectives de u et v sur un intervalle I alors :

- $u + v$ est une primitive de $u' + v'$ sur I
- uv est une primitive de $u'v + v'u$ sur I
- λu où λ est un réel est une primitive de $\lambda u'$ sur I

b) Si u' est la fonction dérivée de u sur I , alors $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $u' u^n$ sur I , $n \in \mathbb{N}$.

c) Si u' est la fonction dérivée de u sur I et u ne s'annule pas sur I , alors :

- $\frac{u^{n+1}}{n+1}$, $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ est une primitive de $u' u^n$ sur I
- $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$, $n \in \mathbb{Z} - \{1\}$ est une primitive de $\frac{1}{u^n}$ sur I

d) Si u' est la fonction dérivée de u sur I et si pour tout x élément de I $u(x) > 0$ alors :

$2\sqrt{u}$ est une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I

$\frac{u^{r+1}}{r+1}$, $r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$ est une primitive de $u' u^r$ sur I

e) Si u' est la fonction dérivée de u sur I

- Si u ne s'annule pas sur I alors $\ln |u|$ est une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I
- e^u est une primitive de $u' e^u$ sur I .

Primitives des fonctions usuelles

f est une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I et D_f l'ensemble de définition de f

$f(x)$	$F(x)$	D_f
$a, a \in \mathbb{Z}$	ax	\mathbb{R}
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
$x^n, n \in \mathbb{Z} - \{1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}^* si $n < 0$ et \mathbb{R} si $n \geq 0$
$x^r, r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	\mathbb{R}_+^*
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	\mathbb{R}^*
\sqrt{x}	$2x\sqrt{x}$	\mathbb{R}^+
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	\mathbb{R}_+^*

RESUME

$f(x)$	$F(x)$	D_f
$(ax+b)^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
$(ax+b)^r, r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{r+1}}{r+1}$	$]-\frac{b}{a}, +\infty[$
$\sin x$	$-\cos x$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x$	\mathbb{R}
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b)$	\mathbb{R}
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b)$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$	$-\cot x$	$\mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
e^x	e^x	\mathbb{R}

Intégrale d'une fonction

a) **Définition :** Si f une continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$, on appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le réel : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

b) Propriétés fondamentales

- $\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f qui s'annule au point a .
- $\int_a^b (\alpha f(t)) + \beta g(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$ (linéarité)
- $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$ pour tout $c \in [a, b]$ (relation de Chasles)
- $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(x)dx$.
- Si $a \leq b$ et $f \leq g$, $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
- S'il existe deux réel m et M tels que pour tout x élément de $[a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$ alors :
 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ c'est à dire $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$
- Si $\forall x \in [a, b] |f(x)| \leq M$ alors $|\int_a^b f(x)dx| \leq M|b-a|$ (inégalité de la moyenne).
- On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

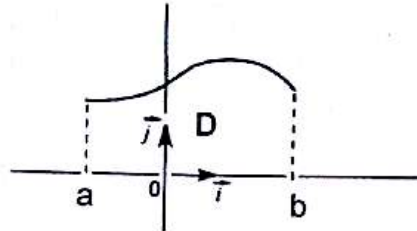
c) **Intégration par parties** Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a, b]$, u' et v' continues sur $[a, b]$.

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

d) Calcul d'aire

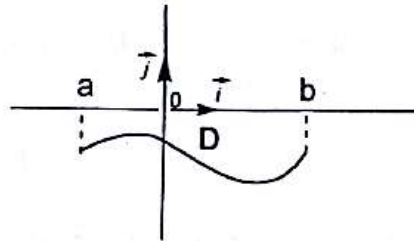
$$\bullet \quad M(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

L'aire du domaine D est $A(D) = \int_a^b f(x)dx$ unité d'aires



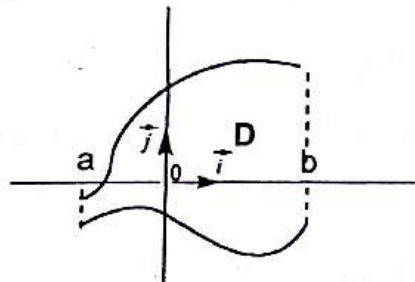
$$\bullet \quad M(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

L'aire du domaine D est $A(D) = -\int_a^b f(x)dx$ u.a



$$\bullet \quad M(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \end{cases}$$

L'aire du domaine D est : $A(D) = \int_a^b f_2(x) - f_1(x)dx$ u.a



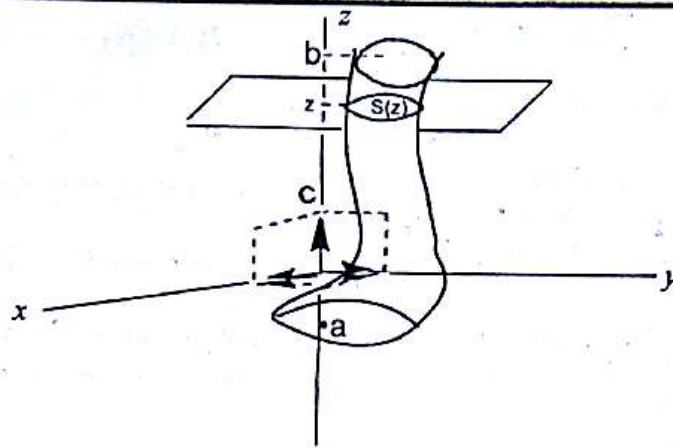
d) Calcul de volumes

Soit $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace, A, B, C les points tels que $\vec{i} = O\vec{A}$, $\vec{j} = O\vec{B}$, $\vec{k} = O\vec{C}$

l'unité de volume est le volume du cube dont $[OA], [OB], [OC]$ sont les arêtes.

Si le solide (Σ) est compris entre les plans d'équations $Z = a$ et $Z = b$ ($a < b$) et si $S(z)$ est l'aire de la section du solide dans le plan de côte Z ($Z \in [a, b]$), alors si la fonction $Z \rightarrow S(z)$ est une fonction

continue sur $[a, b]$, le volume V du solide (Σ) est tel que $V = \int_a^b S(z)dz$



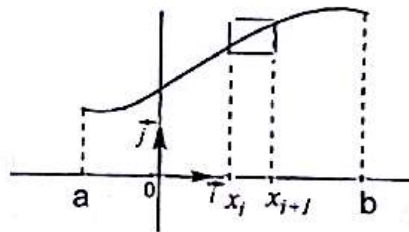
e) Calcul approché d'une intégrale

Soit f une fonction continue, positive et monotone sur $[a, b]$, (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite d'éléments de $[a, b]$ définie par $x_0 = a$,

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n} \text{ et } x_n = b$$

On a alors partagé le segment $[a, b]$ en n segments d'égale amplitude $\frac{b-a}{n}$



$\int_a^b f(x) dx$ est un nombre réel compris:

- entre S_n des aires des rectangles de dimensions $\frac{b-a}{n}$ et $f(x_i)$ pour $i \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$
- et la somme S'_n des aires des rectangles de dimensions $\frac{b-a}{n}$ et $f(x_i)$ pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \quad ; \quad S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

$|S'_n - S_n| = \frac{b-a}{n} |f(b) - f(a)|$ est un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\int_a^b f(x) dx$ par un

nombre réel quelconque compris entre S_n et S'_n $S_n \leq \int_a^b f(x) dx \leq S'_n$

Fonction définie par une intégrale

Soit f une application continue d'un intervalle I dans \mathbb{R} et $a \in I$ considérons la fonction

$F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$. F est la primitive de f qui s'annule en a . F est donc définie et dérivable sur I de fonction dérivée f ; pour tout $x \in I$ $F'(x) = f(x)$.

Si f n'a pas de primitive connue, pour étudier le sens de variation de f il suffit d'étudier le signe de sa fonction dérivée f .

VECTEURS – BARYCENTRE

1. Existence et caractéristiques du barycentre

Définition :

On appelle point pondéré ou point massif tout couple (A, a) où A est un point et a un nombre réel. On dit que a est le coefficient ou le poids de A .

La suite $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$ s'appelle système de points pondérés ; elle est notée $(A_i, a_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Fonction vectorielle de Leibniz

$(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$ sont n points pondérés. On appelle fonction vectorielle de Leibniz associée au système de points pondérés $(A_i, a_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'application f qui à tout point M du plan P (ou de l'espace E) associe le vecteur.

$$f(M) = \sum_{i=1}^n a_i \vec{MA}_i = a_1 \vec{MA}_1 + a_2 \vec{MA}_2 + \dots + a_n \vec{MA}_n$$

Si $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ alors le vecteur $f(M)$ est constant.

Théorème et définition :

Soit $(A_i, a_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de point pondérés tels que $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$. Alors il existe un point

unique G tel que $f(G) = \vec{0}$ c'est à dire $\sum_{i=1}^n a_i \vec{GA}_i = \vec{0}$

G est appelé le barycentre du système de point pondérés $(A_i, a_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Conséquences

G est le barycentre du système de point pondérés $(A_i, a_i)_{1 \leq i \leq n}$:

$$- \text{ Pour tout point } M, \sum_{i=1}^n a_i \vec{MA}_i = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \vec{MG} \text{ c'est à dire } \vec{MG} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \vec{MA}_i}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

- Si le plan P est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les coordonnées (x_G, y_G) de G en fonction des coordonnées (x_i, y_i) des points $A_i, 1 \leq i \leq n$ sont :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\sum_{i=1}^n a_i} ; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_i y_i}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

- Si l'espace E est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ les coordonnées (x_G, y_G, z_G) de G en fonction des coordonnées (x_i, y_i, z_i) des points $A_i, 1 \leq i \leq n$ sont :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\sum_{i=1}^n a_i} ; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_i y_i}{\sum_{i=1}^n a_i} ; \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n a_i z_i}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

2. Barycentre de deux points et de trois points

- G est le barycentre de 2 points pondérés $(A, a), (B, b)$ équivaut à $a \vec{GA} + b \vec{GB} = \vec{0}$ avec $a + b \neq 0$.

alors $\vec{AG} = \frac{b}{a+b} \vec{AB}$ ce qui signifie que G est sur la droite (AB) .

• Dans l'espace, si G est le barycentre de trois points pondérés (A, a) , (B, b) , (C, c) distincts et non alignés.

Alors $a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0}$ ce qui équivaut à $\vec{AG} = \frac{b}{a+b+c} \vec{AB} + \frac{c}{a+b+c} \vec{AC}$ le point G est donc dans le plan (ABC) .

Théorème :

- L'ensemble des barycentres de 2 points distincts A et B est la droite (AB) .
- L'ensemble des barycentres de trois points non alignés A , B et C est le plan (ABC) .

3. Propriétés du barycentre

Théorème 1 : Pour tout nombre réel k non nul, les points pondérés $(A_1, ka_1), (A_2, ka_2), \dots, (A_n, ka_n)$ soit $(A_i, ka_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$ ont le même barycentre.

Théorème 2 : (Associativité du barycentre)

Soit $(A_i, a_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de points pondérés tel que $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$ soit p un élément de $\{1, 2, \dots, n\}$ tel que

$\sum_{i=1}^p a_i \neq 0$ et soit G' le barycentre du système de points pondérés $(A_i, a_i)_{1 \leq i \leq p}$

Alors le barycentre du système de points pondérés et $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$ est le barycentre

du système : $\left((G', \sum_{i=1}^p a_i), (A_{p+1}, a_{p+1}), (A_{p+2}, a_{p+2}), \dots, (A_n, a_n) \right)$

4. Fonction scalaire de Leibniz

a) **Définition :** On appelle fonction scalaire de Leibniz associé au système de points pondérés $(A_i, a_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'application g du plan P (ou de l'espace E) dans \mathbb{R} définie par :

$$g: M \rightarrow \mathbb{R} \quad g(M) = \sum_{i=1}^n a_i MA_i^2$$

- Si $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, soit G le barycentre du système $(A_i, a_i)_{1 \leq i \leq n}$. Alors pour tout M :

$$g(M) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) MG^2 + \sum_{i=1}^n a_i GA_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) MG^2 + g(G) \quad \text{c'est à dire}$$

$$g(M) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) MG^2 + a_1 GA_1^2 + \dots + a_n GA_n^2$$

b) **Surface (ou ligne) de niveau d'une fonction scalaire de Leibniz :**

Trouver la ligne de niveau k , $k \in \mathbb{R}$ de la fonction g c'est trouver l'ensemble S des solutions de l'équation $S(M) = k$

- Si $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, $g(M) = k \Leftrightarrow MG^2 = \frac{k - g(G)}{\sum_{i=1}^n a_i}$ en posant $\lambda = \frac{k - g(G)}{\sum_{i=1}^n a_i}$ on a :

• $\lambda < 0$, alors $S = \emptyset$

• $\lambda = 0$, alors $S = \{G\}$

• $\lambda > 0$, alors S est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\lambda}$ dans le plan P et S est la sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\lambda}$ dans l'espace E .

- Si $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ posons $\sum_{i=1}^n a_i \vec{MA_i} = \vec{v}$ (qui est un vecteur constant)
- Si $\vec{v} = \vec{0}$ alors S est soit l'ensemble vide, soit P (ou E)
 - Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors s est une droite orthogonale à \vec{v} dans le plan P et S est un plan dont un vecteur normal est \vec{v} dans l'espace E .

APPLICATIONS AFFINES

1. Applications linéaires :

Soit V l'ensemble des vecteurs de E (ou P)

Définition :

On appelle application linéaire de V dans V (ou endomorphisme de V) toute application φ de V dans V telle que : pour tout vecteur \vec{u} et pour tout vecteur \vec{v} de V , $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$

- pour tout vecteur \vec{u} de V et pour tout nombre réel λ , $\varphi(\lambda\vec{u}) = \lambda\varphi(\vec{u})$
- Si φ est une application linéaire du plan vectoriel dans lui-même, muni d'une base
- * (\vec{i}, \vec{j}) telle que $\varphi(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\varphi(\vec{j}) = c\vec{i} + d\vec{j}$ alors le tableau noté $M\varphi$, et qui est :

$M\varphi = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est appelée matrice de l'application linéaire φ relativement à la base (\vec{i}, \vec{j}) pour tout

vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur $\varphi(\vec{u})$ a pour coordonnées dans la base (\vec{i}, \vec{j}) : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

soit $\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$ ce système d'équations définit analytiquement l'application linéaire φ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

- Si φ est une application linéaire de l'espace vectoriel dans lui-même muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ telle que $\varphi(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, $\varphi(\vec{j}) = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$, $\varphi(\vec{k}) = a''\vec{i} + b''\vec{j} + c''\vec{k}$ la matrice notée $M\varphi$,

$M\varphi = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ est appelée matrice de l'application linéaire φ relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Pour tout vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le vecteur $\varphi(\vec{u})$ a pour coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{cases} x' = ax + a'y + a''z \\ y' = bx + b'y + b''z \\ z' = cx + c'y + c''z \end{cases}$$

Remarque : φ bijective $\Leftrightarrow \det M\varphi \neq 0$

2. Définitions et propriétés immédiates d'une application affine :

Définition 1 :

On appelle application affine de E dans E (ou de P dans P) une application f de E dans E (ou de P dans P) qui transforme le barycentre de tout système de points pondérés en le barycentre de l'image de ce système c'est à dire si G est le barycentre du système $(A_i, a_i)_{1 \leq i \leq n}$ alors $f(G)$ est le barycentre

$$(f(A_i), a_i)_{1 \leq i \leq n}.$$

(On définit de même une application affine d'une droite D dans D)

Définition 2 :

Soit f une application affine. L'application linéaire φ qui à tout vecteur \vec{u} de représentant (A, B) associe le vecteur $\varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ est appelée application linéaire associée à l'application affine de f .

Remarque : f est bijective si et seulement si φ est bijective.

Théorème :

Soit f une application du plan P dans P rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) f est une application affine si et seulement si les coordonnées x' et y' de l'image d'un point quelconque $M(x, y)$ sont des fonctions affines de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} c'est à dire :

$$x':(x, y) \rightarrow x' = ax + by \text{ et } y':(x, y) \rightarrow y' = cx + dy$$

- Soit f une application de l'espace affine E dans E rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ f est une application affine si et seulement si les coordonnées x' , y' , et z' de l'image d'un point quelconque $M(x, y, z)$ de E dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont des fonctions affines de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} c'est à dire :

$$x':(x, y, z) \rightarrow x' = ax + by + cz ; y':(x, y, z) \rightarrow y' = a'x + b'y + c'z \text{ et } z':(x, y, z) \rightarrow z' = a''x + b''y + c''z$$

Définition 3 :

Une application affine bijective est appelée transformation affine.

Théorème :

Une application affine est une transformation affine si et seulement si son application linéaire associée est bijective.

Définition 4 :

On appelle point invariant par une application affine f tout point M tel que $f(M) = M$.

On dit qu'une partie X de E est :

- invariante point par point par f si $\forall M \in X \ f(M) = M$
- globalement invariante par f si $\forall M \in X \ f(M) \in X$

3. Propriétés

a) Une application affine conserve :

- L'alignement : si les points A, B, C sont alignés, alors leurs images A', B', C' sont alignés.
- Le parallélisme : si les droites D_1 et D_2 sont parallèles leurs images D_1, D_2 sont parallèles.
- L'équipollence de deux bipoints.

b) Une application affine est entièrement déterminée par la donnée d'un repère et de l'image de celui-ci

c) La composée de deux applications affines est une application affine, la composée de deux transformations affines est une transformation affine.

Les transformations affines forment un groupe.

d) **Théorème :** Une application affine de E dans E (de P dans P ou de D dans D) est bijective si et seulement si l'image d'un repère R de E (de P ou D) est un repère de E (de P ou de D)

4. Détermination analytique d'une application affine

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de E . f une application affine de E dans E et φ l'application linéaire associée

à f de matrice $\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'application affine f sera parfaitement déterminée si l'on connaît l'image d'un point de E par f et la matrice de φ .

Soit par exemple $f(O) = O'(x_0, y_0, z_0)$ alors pour tout point $M(x, y, z)$ de E tel que $f(M) = M'(x', y', z')$

on a : $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM})$ ce qui équivaut à :

$$\begin{pmatrix} x'-x_0 \\ y'-y_0 \\ z'-z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{cases} x' = ax + a'y + a''z + x_0 \\ y' = bx + b'y + b''z + y_0 \\ z' = cx + c'y + c''z + z_0 \end{cases} \text{ ce qui définit analytiquement l'application affine } f \text{ dans le repère } (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

5. Homothéties – Translations – Projections

a) Homothéties

Définition : l'homothétie de centre Ω et de rapport le réel non nul k est la transformation qui, à

chaque point M de E (de P ou de D) associe le point M' tel que $\vec{\Omega M'} = k\vec{\Omega M}$

- Si $k = 1$ l'homothétie est l'application identique id_E (ou id_P et id_D)

- Si $k = -1$ l'homothétie est la symétrie centrale de centre Ω

Propriétés

- Si h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k , alors tous points M et N avec $M' = h(M)$ et $N' = h(N)$ on a : $\vec{M'N'} = k\vec{MN}$
- Si $M' = h(M)$ alors Ω, M, M' sont alignés.
- La composée de 2 homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2 est une homothétie de rapport $k_1 \times k_2$
- L'ensemble H des homothéties muni de la loi (\circ) de composition des applications est un groupe.
- Une homothétie est entièrement déterminée par la donnée du centre Ω , d'un point A distinct de Ω et de son l'image A' .
- Une homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2 , les volumes $|k|^3$.

Images de figures : Par une homothétie :

- L'image d'une droite est une droite parallèle.
- L'image d'un plan est un plan parallèle.
- L'image d'un cercle d'un plan P est un cercle situé sur un plan parallèle à P .
- L'image d'une sphère est une sphère.

b) Translations :

Définition : la translation de vecteur \vec{u} est la transformation qui à chaque point M de E (de P ou de D),

associe le point M' tel que $\vec{MM'} = \vec{u}$

Propriétés :

- Si t est la translation de vecteur \vec{u} , alors pour tous points M et N de E (de P ou de D), avec $M' = t(M)$ et $N' = t(N)$ on a : $\vec{M'N'} = \vec{MN}$
- Si $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ sont les translations de vecteurs respectifs \vec{u} et \vec{v} alors $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$ où $t_{\vec{u}+\vec{v}}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

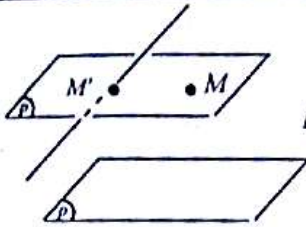
Images de figures : Par une translation :

- L'image d'une droite est une droite parallèle.
- L'image d'un plan est un Plan parallèle.
- L'image d'un cercle d'un plan P est un cercle de même rayon
- L'image d'une sphère est une sphère de même rayon.

c) Projections :

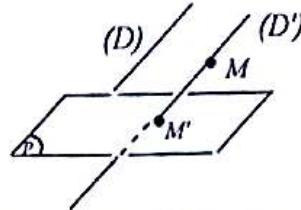
Définition 1 : Une droite (D) et un plan P étant donnés, (D) non parallèle à (P) , on appelle projection sur (D) suivant (P) ou suivant la direction de (P) , l'application p de E qui, à tout point M , associe le point M' , intersection de (D) et du plan passant par M et parallèle à (P) .

L'image M' de M est appelée projeté de M sur (D) suivant (P) .



Le plan (P) est appelé projetant de M sur (D) .

Définition 2 : Soit (P) un plan et (D) une droite non parallèle à (P) . On appelle projection sur (P) suivant (D) ou suivant la direction de (D) , l'application p de E qui à tout point M , associe le point M' intersection du plan (P) et de l'unique droite (D') passant par M et parallèle à (D) .



La droite (D') est appelée projetante de M sur (P) si \vec{u} est un vecteur directeur de (D) ,

$$p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{MM'} = \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R} \\ M' \in P \end{cases}$$

Caractérisation : une application affine p est une projection si et seulement si $pop = p$.

Remarques :

- une projection n'est pas une bijection
- l'application linéaire ϕ associée à une projection est appelée projection vectorielle ; elle est caractérisée par : pour tout vecteur \vec{u} , $\phi \circ \phi(\vec{u}) = \phi(\vec{u})$.

ISOMETRIES PLANES

1. GENERALITES

a) Définition ; exemples d'isométrie :

• Une application du plan P est une transformation de f de P telle que : pour tous points M et N de P , $M'N' = MN$ où l'on note $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$. (on dit qu'une isométrie du plan P est une transformation de P qui conserve les distances)

• Exemples d'isométrie :

- les translations : pour tous points M et N , $\vec{M'N'} = \vec{MN}$
- les réflexions ou symétries axiales orthogonales
- les rotations : pour tous points M et N distincts, leurs images M' et N' par une rotation d'angle θ

vérifient :
$$\begin{cases} M'N' = MN \\ \left(\vec{M'N'} = \vec{MN} \right) = \theta \end{cases}$$

b) Composition d'isométrie

Théorème : La composition de deux isométrie est une isométrie. La transformation réciproque d'une isométrie est une isométrie

c) Invariants d'une isométrie

• Une isométrie plane conserve le produit scalaire c'est à dire si f est une isométrie du plan, pour tous points A, B, C de P $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{A'B'} \cdot \vec{A'C'}$ avec $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$

- Une isométrie plane conserve le barycentre de n points massifs
- Une isométrie plane conserve : le parallélisme, l'équipollence, l'orthogonalité, le contact, les aires et les angles géométriques.

d) Images de figures :

Par une isométrie du plan :

- l'image d'une droite est une droite
- l'image d'un segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$
- l'image d'un cercle de centre I et de rayon r est un cercle de centre I' et de rayon r .

e) Isométrie vectorielles

L'application linéaire associée à une isométrie de P est appelée isométrie vectorielle. C'est une bijection de V dans V .

Propriétés

- Toute isométrie vectorielle ϕ de V conserve la norme de tout vecteur de V , c'est à dire pour tout vecteur \vec{u} de V $\|\phi(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$
- Toute isométrie vectorielle ϕ de V conserve le produit scalaire de tout couple de vecteurs de V , c'est à dire pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} de V $\phi(\vec{u}) \cdot \phi(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$
- Une application linéaire est une isométrie si et seulement si elle conserve la norme de tout vecteur de V ou le produit scalaire de tout couple de vecteurs de V

Théorème : Une application affine de P est une isométrie si et seulement si son application linéaire associée est une isométrie vectorielle.

f) Image d'un repère orthonormé par une isométrie :

Théorème : Une application affine f de P est une isométrie si et seulement si, l'image d'un repère orthonormé R de P par f est un repère orthonormé de P .

g) Classification des isométries :

Soit f une isométrie de P

- Si f admet P comme ensemble de points invariants, f est alors l'identité de P .
- Si f admet une droite (D) comme ensemble de points invariants alors f est symétrie orthogonale d'axe (D)
- Si f admet un seul point invariant A , alors f est la rotation de centre A et d'angle orienté $\left(\vec{AM}, \vec{AM'}\right)$ où M est un point quelconque de P et $f(M) = M'$
- Si f n'admet pas de point invariant, alors f est : soit la translation de vecteur non nul, soit les composées d'une symétrie orthogonale et d'une translation dont le vecteur n'est pas normal à l'axe de cette symétrie (ou d'une translation et d'une symétrie orthogonale vérifiant les mêmes conditions). Ces dernières s'appellent des symétries glissées.

Théorème : Les isométries de P sont :

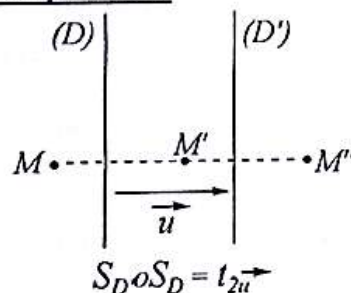
- les translations
- les rotations
- les symétries orthogonales
- les symétries glissées
- Toute isométrie de P est soit une symétrie orthogonale, soit la composée de deux ou trois symétries orthogonales.

Définitions :

- * On appelle isométrie directe ou déplacement toute isométrie de P pouvant se décomposer comme produit de deux symétries orthogonales. Ce sont les isométries qui conservent les angles orientés.
- * On appelle isométrie indirecte ou antidéplacement, toute isométrie de P étant, soit une symétrie orthogonale, soit la composée de trois symétries orthogonales.
- * On note I l'ensemble des isométries, I^+ l'ensemble des déplacements et I^- des antidéplacements ;
 $I = I^+ \cup I^-$
- * Tout déplacement de P est soit une translation, soit une rotation y compris l'identité de P .
- Tout antidéplacement de P est soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissée.

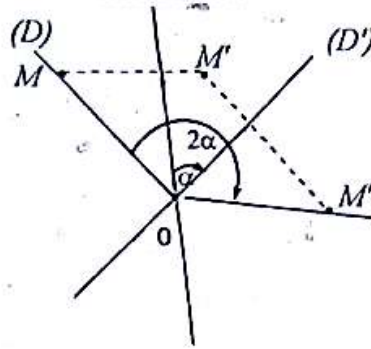
2 . REFLEXIONS – TRANSLATIONS – ROTATIONS

a) Composée de deux réflexions d'axes parallèles



Théorème :

- * La composée $S_{D'} o S_D$ de deux réflexions d'axes parallèles (D) et (D') est la translation de vecteur $2\vec{u}$ où \vec{u} est le vecteur normal à (D) et tel que $t_{\vec{u}}(D) = D'$
- * Toute translation de vecteur \vec{u} non nul est la composée de deux réflexions d'axes parallèles (D) et (D') , $t = S_{D'} o S_D$, (D) ou (D') étant arbitrairement choisie, de vecteur normal \vec{u}

**Théorème :**

* La composée $S_{D'} \circ S_D$ de deux réflexions d'axes sécants en O est la rotation de centre O et d'angle $2(\vec{u}, \vec{v})$ où \vec{u} et \vec{v} sont des vecteurs directeurs respectifs de (D) et (D') .

* Toute rotation de centre O et d'angle θ est la composée de deux réflexions dont les axes (D) et (D') sont sécantes en O , $r = S_{D'} \circ S_D$, (D) ou (D') peuvent être choisies arbitrairement passant par O

3. ISOMETRIE FIXANT UN POINT

Un point O est appelée point fixe ou point invariant par f si $f(O) = O$

Propriétés

a) Toute isométrie plane f se décompose de manière unique en $f = t \circ i$ où t est une translation et i une isométrie fixant O .

Une isométrie fixant le point O est :

- soit l'application identique
- soit une réflexion d'axe passant par O
- soit une rotation de centre O

b) Une isométrie plane fixant un seul point O est une rotation de centre O .

c) Une isométrie plane fixant trois points non alignés est l'identité de P .

d) Si une isométrie plane différente de l'identité à deux points fixes distincts O et A , c'est la réflexion d'axe (OA) .

COURBES PARAMETRES

1. FONCTIONS VECTORIELLES A VALEURS DANS V

a) Définition :

Soit un plan P muni d'un repère orthonormal $(o; \vec{i}; \vec{j})$ et V l'ensemble des vecteurs du plan.

On appelle fonction vectorielle d'une variable réelle à valeurs dans V toute application \vec{F} d'une partie non vide D de \mathbb{R} dans V .

On note : $\vec{F} : D \rightarrow V$
 $t \mapsto \vec{F}(t)$

b) Fonction coordonnées

Pour chaque réel t de D , désignons par $x_1(t)$ et $y_1(t)$ les coordonnées du vecteur $\vec{F}(t)$ dans la base (\vec{i}, \vec{j})

Nous définissons ainsi deux fonctions numériques x_1 et y_1 de la variable $t : t \mapsto x_1(t)$ et $t \mapsto y_1(t)$ appelée fonctions coordonnées de la fonction vectorielle \vec{F} .

c) Ensemble de définition :

L'ensemble D est appelé l'ensemble de définition de \vec{F} . Parfois D n'est pas précisé ; on dit par exemple « soit la fonction vectorielle $\vec{F} : t \mapsto \vec{F}(t)$ ». Nous convenons alors de prendre pour ensemble de définition de \vec{F} l'ensemble des réels t pour lesquels les réels $x_1(t)$ et $y_1(t)$ existent simultanément.

Exemple : $\vec{F} : t \mapsto (\ln t)\vec{i} + \left(\frac{1}{t-1}\right)\vec{j}$ l'ensemble de définition de \vec{F} est $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

d) Indicatrice d'une fonction vectorielle relative à un point O :

A tout réel t de D associons le point M_t définie par : $\vec{OM} = x_1(t)\vec{i} + y_1(t)\vec{j}$ et désignons par C l'ensemble des points M_t lorsque t décrit D .

L'ensemble C est appelé l'indicatrice relative à O de la fonction vectorielle \vec{F} .

Soit $M(x, y)$ un point quelconque de P .

$M \in C \Leftrightarrow \exists t \in D$ tel que $\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases}$ ce système est appelé une représentation paramétrique de

l'indicatrice C dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$. Le réel t est appelé le paramètre, et M le point de C de paramètre t .

Exemple : Soit la fonction vectorielle $\vec{F} : t \mapsto \vec{F}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$ $D = \mathbb{R}$

L'indicatrice C de \vec{F} relative à O est l'ensemble des points $M(x, y)$ pour lesquels il existe un réel t tel

$$\text{que : } \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

C est le cercle de centre O et de rayon 1.

Remarque : Une même courbe peut avoir plusieurs représentations paramétriques

2. VECTEUR DERIVE EN UN POINT

a) Vecteur dérivé en un point

On dit que \vec{F} est dérivable en t_0 si et seulement si les fonctions coordonnées x_1 et y_1 sont dérivables en t_0 .

Le vecteur $x_1'(t_0)\vec{i} + y_1'(t_0)\vec{j}$ est appelé le vecteur dérivé de \vec{F} au point t_0 ce vecteur est noté $\vec{F}'(t_0)$;

$$\vec{F}'(t_0) = x_1'(t_0)\vec{i} + y_1'(t_0)\vec{j}$$

b) Fonction vectorielle dérivée sur intervalle

Si les fonction x_1 et y_1 sont dérivables simultanément sur un intervalle I de D , on dit que la fonction vectorielle \vec{F} est dérivable sur I , la fonction dérivée vectorielle est définie sur I par :

$$\vec{F}'(t_0) = x_1'(t_0)\vec{i} + y_1'(t_0)\vec{j}$$

c) Tangente à l'indicatrice :

Soit t_0 un élément de D ; supposons que D contient un intervalle de la forme $]t_0 - r, t_0 + r[$

Si la fonction \vec{F} est dérivable en t_0 et si le vecteur $\vec{F}'(t_0)$ n'est pas nul, on dit que l'indicatrice C admet au point M_0 de paramètre t_0 une tangente Δ_0 de vecteur directeur $\vec{F}'(t_0)$, ce vecteur $\vec{F}'(t_0)$ est aussi noté $\frac{d\vec{OM}_0}{dt}$

Remarque : La tangente Δ_0 est perpendiculaire à la droite (OM_0) autrement dit $\vec{F}'(t_0) \cdot \vec{F}(t_0) = 0$

d) Fonction dérivée seconde :

Soit \vec{F} une fonction vectorielle définie sur un ensemble D et à valeurs dans V . Soit I un intervalle de D sur lequel \vec{F} est dérivable et soit \vec{F}' la fonction dérivée de \vec{F} . Si \vec{F}' est elle même dérivable sur I , sa fonction dérivée est appelée fonction dérivée seconde de \vec{F} ou fonction dérivée d'ordre 2 de \vec{F} . On la note \vec{F}'' ou encore $\frac{d^2\vec{F}}{dt^2}$. On dit que la fonction vectorielle \vec{F} est deux fois dérivable sur I .

3. INTERPRETATION CINEMATIQUE

a) Mouvement d'un point matériel :

• Si le réel t représente un instant, une date, un intervalle de R est appelé un intervalle de temps. Les intervalles de temps envisagés sont de la forme $[t_0, t_1]$ ou $[t_0, +\infty[$. Lorsque l'intervalle de temps est de la forme $[t_0, t_1]$, le réel $t_1 - t_0$ est appelé la durée du mouvement

• Le mouvement plan d'un point matériel M pendant un intervalle de temps I est défini par les coordonnées (x, y) du point M en fonction de t dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . Il est donc représenté par une fonction vectorielle \vec{F} définie sur I et à valeurs dans V . Si t est un élément de I , le point M_t défini par : $\vec{OM}_t = \vec{F}(t)$ est la position du point matériel M à l'instant t . La position de M à l'instant t_0 est appelée position initiale, la position à l'instant t_1 est la position finale.

*** Trajectoire :**

- Si \vec{F} est constante sur I , le point M est fixe pendant l'intervalle de temps I .
- Si \vec{F} n'est pas constante, nous supposons qu'elle est deux fois dérivable sur I . L'ensemble des positions du point M quand t décrit I est appelé la trajectoire de M .

La trajectoire de M est donc l'indicatrice de \vec{F} par rapport à O

- On dit que le mouvement de M est rectiligne si et seulement si la trajectoire est incluse dans une droite.

- On dit que le mouvement de M est circulaire si et seulement si la trajectoire est incluse dans un cercle.

b) Vecteur - vitesse :

Définitions : Soit M un point matériel dont le mouvement est représenté par une fonction vectorielle \vec{F} de I dans V .

On appelle vecteur vitesse de M à l'instant t de I le vecteur $\vec{F}^v(t)$; on note $\vec{F}^v(t) = \vec{V}(t)$ ou encore

$$\vec{F}^v(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

- On appelle vecteur arithmétique de M à l'instant t le réel $\|\vec{V}(t)\|$.
- Les coordonnées du vecteur $\vec{V}(t)$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) sont $(x'(t), y'(t))$
- Si à un instant t , $\vec{V}(t) \neq \vec{0}$, $\vec{V}(t)$ est un vecteur directeur de tangente à la trajectoire au point M_t , position de M à l'instant t .
- On appelle hodographe du mouvement relativement à un point A de P , l'indicatrice de la fonction \vec{V} relative à A .

c) Vecteur - accélération :

On appelle vecteur accélération à l'instant t le vecteur $\vec{F}^a(t)$ ce vecteur

- accélération est notée $\vec{\Gamma}(t)$
- Les coordonnées du vecteur $\vec{\Gamma}(t)$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) sont $(x''(t), y''(t))$
- Pour tout instant t de I , on a $\vec{\Gamma}(t) = \vec{V}'(t)$

4. EXEMPLE DE TRACE DE COURBE

Soit C la courbe de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad t \in [-2, 2]$$

La fonction vectorielle associée est l'application de $[-2, 2]$ dans V définie par : $\vec{F}(t) = t^2\vec{i} + (1 - 2t)\vec{j}$

Etude conjointe de x et y

Les fonctions x et y sont dérivable sur $[-2, 2]$ et l'on a : $x'(t) = 2t$; $y'(t) = -2$

t	-2	0	2
$x'(t)$	-	0	+
$x(t)$	4	0	4

t	-2	2
$y'(t)$	-	-
$y(t)$	5	-2

On représente cette étude en un seul tableau de l'étude conjointe des variations de x et de y .

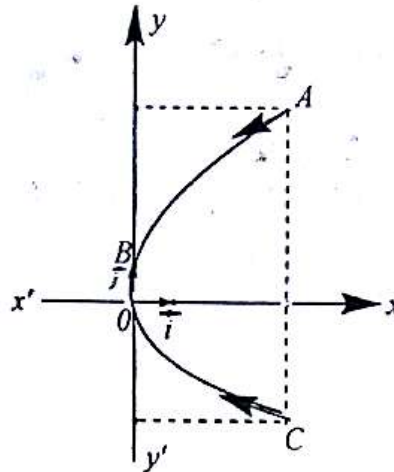
t	-2	0	2
$x'(t)$	-	0	+
$y'(t)$	-	-	-
$x(t)$	4	0	4
$y(t)$	5		-3

Tracé de la courbe

L'examen du tableau permet de tracer la courbe C après avoir placé quelque point avec leurs tangentes :

- Le réel -2 est la borne inférieure de D on a : $x(-2) = 4$ et $y(-2) = 5$, $x'(-2) = -4$ et $y'(-2) = -2$ la courbe C passe par le point $A(4, 5)$; elle admet en ce point une demi tangente à gauche dont le support a pour vecteur directeur $(-4, -2)$.

- Pour $t = 0$ on a : $x(0) = 0$ et $y(0) = 1$; $x(0) = 0$ et $y(0) = -2$



La courbe C passe par le point $B(0, 1)$ et elle admet ce point $(y'y)$ pour tangente.

- Le réel 2 est la borne supérieure de D on a : $x(2) = -3$; $x(2) = 4$ et $y(2) = -4$ la courbe C passe par le point $C(4, -3)$ et admet en ce point une demi tangente à gauche dont le support a pour vecteur directeur $(4, -2)$

Equation cartésienne :

$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 1 - 2t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1-y}{2} \text{ et } x = \left(\frac{1-y}{2}\right)^2$ la courbe C est donc incluse dans la parabole (Γ) d'équation

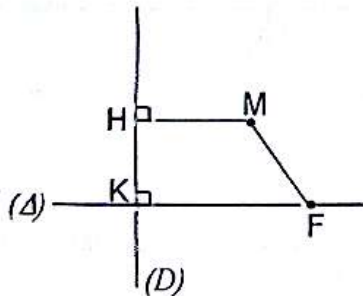
cartésienne $x = \left(\frac{1-y}{2}\right)^2$

CONIQUES

1. DEFINITION PAR FOYER ET DIRECTRICE

a) Définition :

On donne le plan une droite (D) et un point F non situé sur (D) , e un nombre réel strictement positif. On appelle conique de foyer F , de directrice (D) et d'excentricité e , l'ensemble (\mathcal{C}) des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur (D)



b) Axe focal :

La droite (Δ) orthogonale à (D) et passant par F est l'axe focal de la conique.

L'axe focal d'une conique est axe de symétrie de cette conique.

c) Sommets :

Les points communs à la conique (\mathcal{C}) et l'axe focal (Δ) sont les sommets de conique.

- Si $e = 1$ alors (Δ) contient un seul de (\mathcal{C}) ; le milieu S du segment $[FK]$; la conique est alors appelée une parabole et S est le sommet de la parabole.

- Si $e \neq 1$ alors (Δ) contient deux points de (\mathcal{C}) : les points A et A' communs à (Δ) et à la ligne de niveau e de $M \mapsto \frac{MF}{MK}$ qui est un cercle dont le centre est un point de (Δ)

* Si $0 < e < 1$ la conique (\mathcal{C}) est appelée ellipse.

* Si $e > 1$ la conique (\mathcal{C}) est appelée une hyperbole.

* Si le milieu O du segment $[AA']$ est centre de symétrie de la conique \mathcal{C} (ellipse ou hyperbole)

* L'ellipse et l'hyperbole sont les coniques à centre

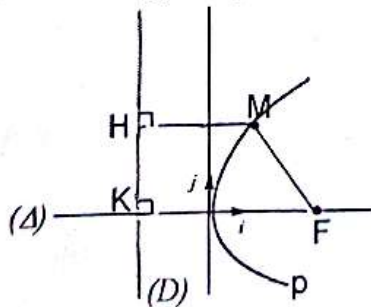
La parabole n'est pas une conique à centre.

2. PARABOLE

1) Equation réduite :

Soit (D) une droite F un point du plan non situé sur (D) . L'ensemble des points du plan équidistant de F et (D) est une parabole. F est le foyer, (D) la directrice.

La distance $p = FK$ du foyer à la directrice est appelée paramètre de la parabole.



Théorème : La parabole (\mathcal{C}) de sommet S , de paramètre P , a pour équation dans le repère orthonormal (S, \vec{i}, \vec{j}) du plan (où (S, \vec{i}) est l'axe focal) : $2px = y^2$. Cette équation est appelée équation réduite de la parabole (\mathcal{C}) est $F\left(\frac{P}{2}, 0\right)$ et la directrice la droite d'équation $x = -\frac{P}{2}$.

3. CONIQUE A CENTRE

a) Pour $e \neq 1$, la conique (\mathcal{C}) a deux sommets A et A' . Soit O le milieu de $[AA']$, le centre de la conique

Notons $c = OF$, $a = OA$; alors $e = \frac{c}{a}$ et $OK = \frac{a}{e}$

Soient (x, y) les coordonnées d'un point M quelconque du plan dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , H le projeté orthogonal de M sur (D) $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow MF^2 = eMH^2$

$$\text{soit } (x - c)^2 + y^2 = e^2 \left(x - \frac{a}{e}\right)^2$$

(\mathcal{C}) a pour équation dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

b) Ellipse : $0 < e < 1$ alors $a > c$ notons $b = \sqrt{a^2 - c^2}$
 $b > 0$ et $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

• Soit (Δ') la droite orthogonale à (Δ) passant par O (\mathcal{C}) coupe (Δ') en deux points $B(0, b)$ et $B'(0, -b)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

• La droite (Δ') est le second axe de symétrie de (\mathcal{C})

• $a > b$ le nombre $a = AA'$ est appelé grand axe et le nombre $b = BB'$ est appelé petit axe (non focal) de l'ellipse (\mathcal{C})

• Equation réduite de (\mathcal{C}) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

• Les directrices sont les droites (D) et (D') :

$$(D) : x = \frac{a^2}{c} ; (D') : x = -\frac{a^2}{c}$$

• Les foyers sont les points : $F(-c, 0)$; $F'(c, 0)$

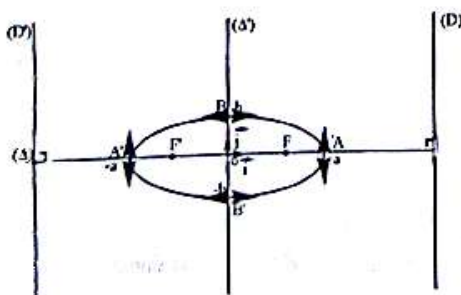
• Les points $A(a, 0)$; $A'(-a, 0)$; $B(0, b)$; $B'(0, -b)$ sont les sommets de l'ellipse.

• (\mathcal{C}) est la réunion des courbes représentatives (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) respectives des fonctions

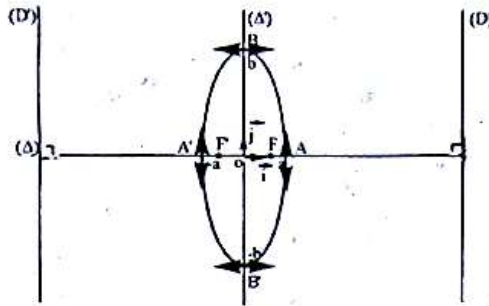
$$f_1 : x \mapsto \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ et } f_2 : x \mapsto -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ définies sur } [-a, a].$$

(\mathcal{C}_1) est le symétrique de (\mathcal{C}_2) par rapport à la droite (Δ)

$a > b$



* On dit que F est le foyer associé à la directrice (D) et F' est le foyer associé à la directrice (D')

$a < b$ 

- La tangente à (\mathcal{C}) en un point M_0 de (\mathcal{C}) a pour équation $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Théorème : l'ellipse (\mathcal{C}) est l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$ (définition bifocale d'une ellipse).

c) **Hyperbole :** $e > 1$ alors $a < c$, notons $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $b > 0$ $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

- Soit (Δ') la droite orthogonale à (Δ) passant par O (Δ') et (\mathcal{C}) n'ont pas de point commun.

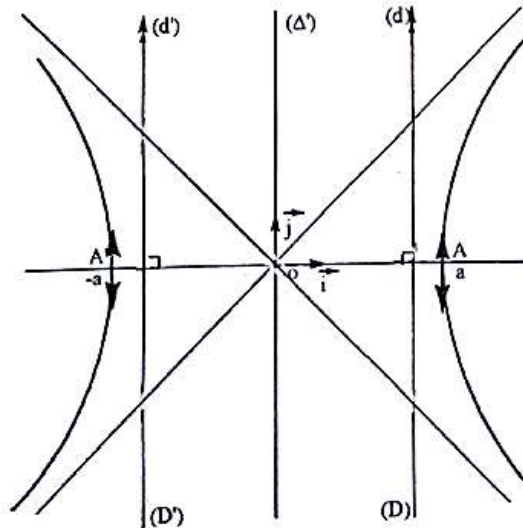
- L'hyperbole (\mathcal{C}) est la réunion des courbes représentatives (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) respectives des fonctions $f_1: x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ et $f_2: x \mapsto -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ définies sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.

(\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) sont symétriques par rapport à (Δ) .

- Les courbes (d) et (d') :

- $(d) : y = \frac{b}{a}x$ $(d') : y = -\frac{b}{a}x$ sont asymptotes à (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) donc à (\mathcal{C})

- Equation réduite de (\mathcal{C}) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



- Les directrices sont les droites : $(D) : x = \frac{a^2}{c}$; $(D') : x = -\frac{a^2}{c}$
- Les foyers sont les points : $F(c, 0)$; $F'(-c, 0)$
- La tangente à l'hyperbole \mathcal{C} en un point $M_0(x_0, y_0)$ est $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Les sommets de l'hyperbole (\mathcal{C}) sont : $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$

- (\mathcal{C}) est appelée hyperbole de foyer F , de directrice associée (D) et d'excentricité e

Théorème : l'hyperbole (\mathcal{C}) est l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$ (définition bifocale d'une hyperbole)

4 - Représentation paramétrique d'une conique :

Ellipse : Soit (\mathcal{C}) une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal du plan

Une représentation paramétrique de l'ellipse (\mathcal{C}) est :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi]$$

Hyperbole : Soit (\mathcal{C}) l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal du plan.

Une représentation paramétrique de l'hyperbole (\mathcal{C}) est :

$$\begin{cases} x = a \frac{t^2 + 1}{2t} \\ y = b \frac{-t^2}{2t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^*$$

Parabole : Soit (\mathcal{P}) une parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormal du plan.

Une représentation paramétrique de (\mathcal{P}) est :

$$\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

NOMBRES COMPLEXES :

~ ENONCES ~

EXERCICE 1

Soit f l'application de $E = \mathbb{C} - \{-i\}$ dans \mathbb{C} définies par $z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(o; \vec{u}; \vec{v})$ on note M le module d'affixe z .

- 1°) Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 est telle que $f(z_0) = 1 + 2i$.
- 2°) Soit z un élément de E . On note r le module $z+i$ et α une mesure de son argument. Exprimer la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et α .
- 3°) Soit A le point d'affixe $-i$
 - a) Déterminer l'ensemble \mathcal{C} des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$ et l'ensemble D des points M tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de $f(z) - i$.
 - b) Montrer que B appartient à \mathcal{C} et D et construire \mathcal{C} et D

EXERCICE 2

- 1) Calculer les racines carrées du nombre complexe $u = -1 - 2\sqrt{2}i$
- 2°) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $2z^2 + 2iz + \sqrt{2}i = 0$. On note z_1 et z_2 les solutions de cette équation.
Montrer que $\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right| = \sqrt{2}$
- 3°) Montrer que l'équation $z^3 - (1+2i)z^2 + (2+2\sqrt{2})iz - 2\sqrt{2}i = 0$ admet une racine réelle que l'on notera z_0 . Résoudre cette équation dans \mathbb{C} . Déterminer les racines cubiques de z_0 .
- 4°) Vérifier que $1+i$ est une racine cubique de $2(i-1)$.
- 5°) Soit $v = \frac{-7+4\sqrt{2}i}{2} + \frac{7+4\sqrt{2}i}{2}$. Montrer que $(1+i; u; v)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

EXERCICE 3

- 1°) Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes tels que l'on ait $z^3 = \frac{1+i}{2}$.
- 2°) Démontrer que l'un d'eux vérifie $z^3 + \bar{z} = 0$
- 3°) Réciproquement trouver tous les nombres complexes z tels que $z^3 + \bar{z} = 0$

EXERCICE 4

- 1°) Démontrer que l'équation suivante où z est l'inconnue et a un paramètre réel, n'admet pas de solution réelle : $2z^2 - 2(1 - \cos 2a)z + 1 - \cos 2a = 0$; $a \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$.
- 2°) Déterminer alors les racines complexes de l'équation
- 3°) Calculer en fonction de a , le module et l'argument de ces racines.

EXERCICE 5

On s'intéresse dans cet exercice aux solutions de l'équation $z^4 - 16z^3 + 90z^2 - 16z + 89 = 0$ (E) dans \mathbb{C}

1°) a) Vérifier l'égalité $z^4 - 16z + 89 = (z^2 + 1)(z^2 - 16z + 89)$

a) Déterminer les quatre solutions de (E)

2°) Le plan est rapporté au repère orthonormal $(o; \vec{u}; \vec{v})$.

Soit A, B, C et D les points dont les affixes sont dans l'ordre : $8 + 5i, i, 8 - 5i$

a) Représenter les points A, B, C et D

b) Montrer que le quadrilatère ABCD admet un axe de symétrie

c) Calculer les longueurs AC, BD et AD.

EXERCICE 6

On considère l'application f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $f(z) = z^3 + 2iz^2 + 9(6i - 11)z - 3(4i + 12)$.

1) Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 .

Factoriser $f(z)$.

2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.

3) Dans le plan complexe on considère les points A, B, C d'affixes respectives : z_1, z_2, z_3 (z_3 étant la 3^e solution de l'équation).

Montrer que ces points sont alignés.

EXERCICE 7

On considère les nombres complexes : $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $u = 1 + j$

1) Etablir les deux égalités suivantes : $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u^{2n+1} = -j^{n+1}$

On pourra raisonner par récurrence.

3) Pour tout entier naturel n , exprimer u^{2n} en fonction de n et j .

4) Application : calculer u^{24} et u^{31} (donner ces nombres sous la forme de $x + iy$ avec x et y réels).

EXERCICE 8

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par : $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $V_n = n \cdot \frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{N}$.

On désigne par M le point du plan complexe d'affixe Z_n définie par

$$Z_n = U_n e^{iV_n} = U_n (\cos V_n + i \sin V_n)$$

1) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles Z_n est réel.

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(o; \vec{u}; \vec{v})$ direct (unité 4 cm)

a) Représenter dans le plan M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 .

b) Calculer en fonction de U_n les longueurs des trois côtés du triangle $OM_n M_{n+1}$. Quelle est la nature de ce triangle ?

3) Soit la suite (a_n) définie par $a_n = |Z_{n+1} - Z_n|$. Montrer que cette suite est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. Déterminer sa limite.

EXERCICE 9

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit A (1 ; 0) et B (-1 ; 0). A tout point M d'affixe $Z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe Z' défini par $Z \times Z' = 1$

1) a) construire M' quand $Z = 2(1+i)$

b) dans le cas général, montre que la droite (AB) est bissectrice de l'angle $(\vec{OM}, \vec{OM'})$ et que $OM \times OM' = OA^2$

2°) a) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\left(\frac{z+z'}{2} - 1\right)\left(\frac{z+z'}{2} + 1\right) = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2$

b) Soit I le milieu de $[MM']$. En utilisant a) montrer que $IA \times IB = IM^2$ et que pour $M \neq A$ et $M \neq B$, la droite (MM') est bissectrice de l'angle (\vec{IA}, \vec{IB}) .

EXERCICE 10

Soit α un nombre réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E) : (1+iz)^3 (1-ig\alpha) = (1-iz)^3 (1+ig\alpha)$$

1) Soit z une solution de (E)

a) Montrer que $|1+iz| = |1-iz|$

b) En déduire que z est réel.

2) a) Exprimer $\frac{1+ig\alpha}{1-ig\alpha}$ en fonction de e^{iu}

b) Soit z un nombre réel ; on pose $z = \tan \varphi$ où $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Ecrire l'équation portant sur φ traduisant (E) et la résoudre.

c) Déterminer les solutions z_1, z_2, z_3 de (E).

EXERCICE 11

1) Ecrire sous forme trigonométrique les racines cubiques du nombre complexe a définie par $a = 16(1-i)$

2) Pour λ nombre réel quelconque, on pose : $z_\lambda = 1+i+2\sqrt{2}e^{i\lambda}$

a) Calculer la partie réelle x_λ et la partie imaginaire y_λ de z_λ .

b) Déterminer lorsque λ décrit $[0; 2\pi]$ l'ensemble (E) des points M de coordonnées (x_λ, y_λ) dans le repère orthonormal $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan complexe \mathbb{P} .

3) Montrer que les solutions de $[z - (1+i)]^3 = a$ sont les affixes des points de (E).

EXERCICE 12

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^n - 1 = 0$ (n entier positif)

2) Soit z_0, \dots, z_{n-1} les racines de l'équation précédente.

Soit $z_0^p + z_1^p + \dots + z_{n-1}^p = S$ où p est un entier positif. Calculer S dans les deux cas suivants :

- p est un multiple de n
- p non multiple de n (on pourra calculer z_k en fonction de z_1).

EXERCICE 13

Soit a un réel appartenant à $[0; 2\pi]$

- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue z : $z^2 - (2^{a+1} \cos a)z + 2^{2a} = 0$. (1). Donner la forme trigonométrique de chaque solution.
- Dans le plan complexe on désigne par A et B les points d'affixes les solutions de l'équation (1). Déterminer a pour que le triangle OAB soit équilatéral.

EXERCICE 14

Résoudre dans le corps \mathbb{C} des nombres complexes le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}$$

N.B : On utilisera $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.

EXERCICE 15

- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$
- Résoudre dans \mathbb{C} les équations $z + \frac{1}{z} = 1$ et $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$.
- Soit $P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$

On pose $Z = z + \frac{1}{z}$. Exprimer $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de Z . En déduire les solutions dans \mathbb{C} de $P(z) = 0$.

EXERCICE 16

Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes on considère l'application $f: z \mapsto f(z) = z^3 + az^2 + bz + 8i$

- Déterminer les complexes a et b pour que l'équation $f(z) = 0$ admette dans \mathbb{C} les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2i$ comme solutions.
- Mettre $f(z)$ sous forme d'un produit de facteurs de trois polynômes du premier degré en z . En déduire la 3^e solution z_3 de $f(z) = 0$.
- Déterminer le module et l'argument de z_1 , z_2 et z_3

EXERCICE 17

Soit $(E): z^3 + (i - 2)z^2 + 3(1 - i)z + 2i - 2 = 0$ avec $z \in \mathbb{C}$ une équation

- Montrer que (E) admet une racine réelle z_0 . Résoudre l'équation (E) .
- Soient z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation (E) . Déterminer le complexe t tel que les nombres complexes $z_0 - t$; $z_1 - t$; $z_2 - t$ aient le même module.

EXERCICE 18

On considère dans \mathbb{C} l'équation : $z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26 = 0$. Montrer que si z_0 est une solution de cette équation, son conjugué $\overline{z_0}$ est aussi une solution.

Résoudre l'équation après avoir vérifié que $1 + i$ est une solution.

EXERCICE 19

Soit z et Z les nombres complexes définies par : $z = \sqrt{1+\sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}$ et $Z = z^4$; Déterminer les racines quatrièmes de z sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique, en déduire $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

EXERCICE 20

P est le plan muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et A est le point d'affixe 3.

1) OAB est un triangle équilatéral direct et N est le milieu de $[AB]$. Donnez le module et l'argument de l'affixe z de N .

2) OAN est isocèle direct et rectangle en N . Donner le module et l'argument de l'affixe Z de N .

EXERCICE 21

Soient les nombres complexes $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$, A l'image de z_1 et B l'image de z_2 dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

On appelle C l'image de A par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{5\pi}{6}$.

- Calculer l'affixe z_3 de C .
- Prouver que $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ est un imaginaire pur. Calculer le module de ce quotient.
- En déduire la nature du triangle ABC .

EXERCICE 22

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ d'unité 1cm, on considère les points

A, B et C d'affixes respectifs : $a = 2 - 2i\sqrt{3}$, $b = 2 + 2i\sqrt{3}$, $c = 8$

1) Écrire a, b et c sous la forme trigonométrique. Placer les points A, B et C .

2) Calculer le nombre complexe $q = \frac{a-c}{b-c}$ que l'on écrira sous la forme exponentielle. En déduire la nature du triangle ABC .

3) Déterminer le barycentre G des points pondérés $(A, |a|)$, $(B, |b|)$, $(C, |c|)$

4) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que

$$\left\| \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} \right\| = \left\| \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} \right\|$$

(D'après Bacc. SET. MTI. MTGC. 1998)

EXERCICE 23

1) a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (2 + \sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$

On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive

b) On considère les nombres complexes $u = z_1 + 1$ et $v = u^2 - 2$

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormal $(o; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ d'unité graphique 2cm, placer les points A, B, C et D d'affixes respectifs 1, z_1 , u et v

d) Démontrer que les points A, B et D sont alignés

(D'après Bacc. SBT. 1998)

~ SOLUTIONS ~

EXERCICE 1

$$f: \mathbb{C} - \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}$$

1) Soit $B(x_0, y_0)$ donc $z_0 = x_0 + iy_0$; $f(z_0) = 1 + 2i$ équivaut à $\frac{iz_0}{z_0+i} = 1 + 2i \Leftrightarrow z_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

d'où $B(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$

2) $z \in E \Leftrightarrow z \neq -i$. On a $|z+i| = r$ et $\text{Arg}(z+i) = \alpha$

$$f(z) - i = \frac{iz}{z+i} - i = \frac{1}{z+i} \text{ d'où } |f(z) - i| = \left| \frac{1}{z+i} \right| = \frac{1}{r};$$

$$\text{Arg}(f(z) - i) = \text{Arg}\left(\frac{1}{z+i}\right) = -\text{Arg}(z+i) = -\alpha; \text{ d'où } f(z) - i = \frac{1}{r} [\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)]$$

3) A est le point d'affixe $-i$ implique $A(0; -1)$

a) $|f(z) - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{z+i} \right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z+i| = \frac{\sqrt{2}}{2};$

d'où \mathcal{C} est le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$

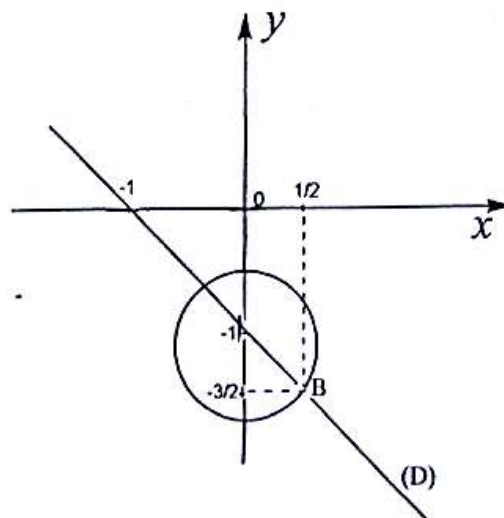
$$\text{Arg}(f(z) - i) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{Arg}(z+i) = -\frac{\pi}{4} \text{ cela traduit que le point d'affixe } z+i \text{ appartient à la droite}$$

d'équation $y = -x \Leftrightarrow Y + X = 0$. Si $z = x + iy$ alors $z+i = x + (1+y)i$ d'où

$$\text{Arg}(z+i) = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow y = -x - 1 \text{ qui est l'équation de la droite } D.$$

b) Nous avons $d(A, B) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $B \in \mathcal{C}$

d'autre part: $-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - 1$ donc $B \in D$



EXERCICE 2

1) Calcul des racines carrées de $u = -1 - 2\sqrt{2}i$

$$u = (x + iy)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = 3 \\ xy = -\sqrt{2} \end{cases}$$

On obtient $u_1 = 1 - i\sqrt{2}$ et $u_2 = -1 + i\sqrt{2}$ comme les racines carrées de $u = -1 - 2\sqrt{2}i$

2) $2z^2 + 2iz + \sqrt{2}i = 0$: $\Delta' = -1 - 2\sqrt{2}i = (1 - i\sqrt{2})^2$

$$z_1 = \frac{1 - i(1 + 2\sqrt{2})}{2} \quad ; \quad z_2 = \frac{-1 - i(1 - 2\sqrt{2})}{2}$$

$$\left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1 + z_2}{z_1 \times z_2} \right| = \left| \frac{-i}{\frac{\sqrt{2}i}{2}} \right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

3) Soit z_0 la racine réelle de : $z^3 - (1 + 2i)z^2 + (2 + 2\sqrt{2})z - 2\sqrt{2}i = 0$

$$\text{alors } z_0^3 - z_0^2 + (-2z_0^2 + (2 + 2\sqrt{2})z_0 - 2\sqrt{2})i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_0^3 - z_0^2 = 0 \\ -2z_0^2 + (2 + 2\sqrt{2})z_0 - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

on trouve $z_0 = 1$.

Après factorisation on trouve $(z - 1)(z^2 - 2iz + 2i\sqrt{2}) = 0$

Les solutions dans \mathbb{C} de $z^2 - 2iz + 2i\sqrt{2} = 0$ sont : $z_1 = 1 + (1 - 2\sqrt{2})i$ et $z_2 = -1 + (1 + 2\sqrt{2})i$

Les racines cubiques de z_0 sont les racines cubiques de 1 qui sont : 1 ; $z_2 = -1$; $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

4) $(4 + i)^3 = 2i(1 + i) = 2(i - 1)$ d'où $1 + i$ est une racine cubique de $2(i - 1)$. Les 2 autres racines sont :

$$(1 + i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad (1 + i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} - \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}i$$

5) $v = \frac{-7 + 4\sqrt{2}}{2} + \frac{7 + 4\sqrt{2}i}{2}$: $(1 + i ; u ; v)$ est une suite géométrique équivaut à $u^2 = v(1 + i)$:

$$u^2 = -7 + 4i\sqrt{2}$$

$$v(1 + i) = \left(\frac{-7 + 4\sqrt{2}}{2} + \frac{7 + 4\sqrt{2}i}{2} \right)(1 + i) = \frac{-7 + 4\sqrt{2}}{2} - \frac{7 + 4\sqrt{2}i}{2} + \frac{-7 + 4\sqrt{2}}{2} + \frac{7 + 4\sqrt{2}i}{2} = -7 + 4\sqrt{2}i$$

d'où $(1 + i ; u ; v)$ est une suite géométrique. La raison est $q = \frac{u}{1 + i} = \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{2} + \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}i$

EXERCICE 3

1) $z^3 = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow z^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \left[1 ; \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right]$

on a donc $z_k = \left[1 ; \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right]$ avec $k \in \{0 ; 1 ; 2\}$

$$z_0 = \left[1 ; \frac{\pi}{12} \right] = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \quad ; \quad z_1 = \left[1 ; \frac{3\pi}{4} \right] = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_2 = \left[1; \frac{17\pi}{12}\right] = \cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12}$$

2) Nous remarquons que $\bar{z}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ donc $z_1^3 + z_1 = 0$

3) Trouvons les complexes $z = a + bi$ tels que $z_1^3 + \bar{z} = 0$

Nous savons que $z = 0$ et $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ sont les solutions de l'équation $z_1^3 + \bar{z} = 0$.

Supposons $z \neq 0$ et $z \neq -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$$z_1^3 + \bar{z} = 0 : a^3 = 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i + a - ib = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 + a = 0 \\ -b^3 + 3a^2b - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2 - 3b^2 + 1) = 0 \\ b(b^2 - 3a^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

Nous remarquons que si $a = 0$ et $b \neq 0$ ou $a \neq 0$ et $b = 0$, il n'y a pas de solution. Ainsi le système devient

$$\begin{cases} a^2 - 3b^2 + 1 = 0 \\ -3a^2 + b^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 8b^2 = 4 \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

• Si $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors on aura $a^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ce qui nous donne $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ou

$z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (cas z_1 déjà étudié)

• Si $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ alors on aura $a^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ce qui nous donne $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

En conclusion les complexes z vérifiant $z_1^3 + \bar{z} = 0$ sont : $z_0 = 0$; $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

EXERCICE 4

1) $a \in]0; \frac{\pi}{2}[: 2z^2 - 2(1 - \cos 2a)z + 1 - \cos 2a = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (1 - \cos 2a)^2 - 2(1 - \cos 2a) = (1 - \cos 2a)(-1 - \cos 2a)$

Nous savons que pour $a \in]0; \frac{\pi}{2}[: 1 - \cos 2a > 0$ et $-1 - \cos 2a < 0$

Donc $\Delta < 0$ ce qui montre que l'équation n'a pas de solution réelle

2) $\Delta = (-1 - \cos 2a)(1 - \cos 2a) = \cos^2 2a - 1 = -\sin^2 2a = (i \sin 2a)^2$

Les solutions complexes sont $z' = \frac{1 - \cos 2a + i \sin 2a}{2}$ et $z'' = \frac{1 - \cos 2a - i \sin 2a}{2}$

$|z'| = |z''| = \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \cos 2a)^2 + \sin^2 2a} = \sin a$

Soit $\theta_1 = \text{Arg} z'$ alors :

$$\cos \theta_1 = \frac{1 - \cos 2a}{2 \sin a} = \frac{2 \sin^2 a}{2 \sin a} = \sin a$$

$$\sin \theta_1 = \frac{\sin 2a}{2 \sin a} = \cos a$$

d'où $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - a : \text{Arg} z' = \frac{\pi}{2} - a$

EXERCICE 5

$$z^4 - 16z^3 + 90z^2 - 16z + 89 = 0 \text{ (E) dans } \mathbb{C}$$

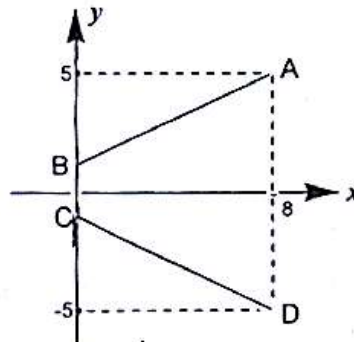
1) a) En développant $(z^2 + 1)(z^2 - 16z + 89)$ on obtient $z^4 - 16z^3 + 90z^2 - 16z + 89$

b) D'après a) l'équation (E) est équivalente à : $z^2 + 1 = 0$ ou $z^2 + 16z + 89 = 0$; $z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = i$ ou $z = -i$

Pour $z^2 + 16z + 89 = 0$ on a $\Delta' = 64 - 89 = -25 = 25i^2$; les solutions de cette équation sont : $z_1 = 8 - 5i$ et $z_2 = 8 + 5i$.

L'ensemble des solutions de (E) est $S = \{i, -i, 8 - 5i, 8 + 5i\}$

2) a) La tracé du courbe



b) l'axe (ox) est un axe de symétrie de ABCD

c) $AC = |8 + 5i + i| = |8 + 6i|$ $AC = 10$

$$BD = |8 - 6i| = 10$$

$$AD = |8 + 5i - 8 + 5i| = 10$$

On remarque que $AC = BD = AD = 10$

EXERCICE 6

On considère l'application $f: \mathbb{C} \text{ dans } \mathbb{C}$ définie par : $f(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$

1) Si le réel z_1 est une solution de l'équation $f(z) = 0$ alors :

$$z_1^3 - 22z_1 - 36 + i(9z_1^2 + 12z_1 - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1^3 - 22z_1 - 36 = 0 & (1) \\ 9z_1^2 + 12z_1 - 12 = 0 & (2) \end{cases}$$

l'équation (2) nous donne $z_1 = -2$ qui est la solution réelle de l'équation $f(z) = 0$

Soit $z_2 = bi$ la solution imaginaire de $f(x) = 0$ alors on a :

$$-b^3i - 9ib^2 - 12b - 22bi - 12i - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -12b - 36 = 0 \\ -b^3 - 9b^2 - 22b - 12 = 0 \end{cases}$$

$$12b + 36 = 0 \Leftrightarrow b = -3 \text{ d'où } z_2 = -3i$$

Ainsi $(z) = (z + 2)(z + 3i)(z - z_3)$. Après développement et identification on obtient

$$-6iz_3 = -3(4i + 12) \Leftrightarrow iz_3 = 2i + 6 \text{ ce qui nous donne } z_3 = 2 - 6i$$

$$\text{d'où } f(z) = (z + 2)(z + 3i)(z - 2 + 6i)$$

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow z = -2$ ou $z = -3i$ ou $z = 2 - 6i$

3) $A(-2; 0)$; $B(0; -3)$ et $C(2; -6)$

$\vec{AB}(2, -3)$; $\vec{AC}(4, -6)$. Nous remarquons $\vec{AC} = 2\vec{AB}$ donc les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE 7

$$j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad u = 1 + j$$

1) On a $j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ donc $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

D'où $1 + j + j^2 = 0$; $j^3 = j \times \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1$

2) Démontrons par récurrence que $u^{2n+1} = -j^{n+2}$

- Si $n = 0$ on aura $u = -j^2$ vraie car $1 + j + j^2 = 0 \Leftrightarrow u + j^2 = 0 \Leftrightarrow u = -j^2$

3) - Supposons que $u^{2n+1} = -j^{n+2}$ et montrons que $u^{2n+3} = -j^{n+3}$

$$u^{2n+3} = u^{2n+1} \times u^2 = u^{2n+1} \times (1 + 2j + j^2) = u^{2n+1} \times j$$

Puisque $u^{2n+1} = -j^{n+2}$ alors $u^{2n+3} = -j^{n+2} \times j = -j^{n+3}$

3) On sait que $u^2 = (1 + j)^2 = 1 + j + j^2 + j \Leftrightarrow u^2 = j$ d'où $u^{2n} = j^n$

Application :

$$u^{24} = u^{2 \times 12} = j^{12} = (j^3)^4 = 1$$

$$u^3 = u^{30+1} = -j^{15+2} = -j^{15} \times j^2 = -j^2 = u = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

EXERCICE 8

$$U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad V_n = n\frac{\pi}{3}, \quad z_n = U_n(\cos V_n + i \sin V_n)$$

1) z_n est réel si $\sin V_n = 0$ ie $V_n = k\pi$; $n\frac{\pi}{3} = k\pi$ nous donne $n = 3k$ avec k un entier naturel

2) $U_0 = 1$ et $V_0 = 0$ donc $z_0 = 0 \rightarrow M_0(1; 0)$

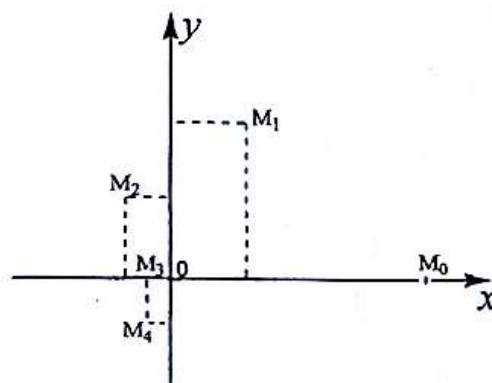
$$U_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad V_1 = \frac{\pi}{3} \quad \text{donc} \quad z_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \rightarrow M_1\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$U_2 = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{2\pi}{3} \quad \text{donc} \quad z_2 = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i \rightarrow M_2\left(-\frac{1}{8}; \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$U_3 = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad V_3 = \pi \quad \text{donc} \quad z_3 = -\frac{1}{8} \rightarrow M_3\left(-\frac{1}{8}; 0\right)$$

$$U_4 = \frac{1}{16} \quad \text{et} \quad V_4 = \frac{4\pi}{3} \quad \text{donc} \quad z_4 = -\frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i \rightarrow M_4\left(-\frac{1}{32}; -\frac{\sqrt{3}}{32}\right)$$

a)



b) Les longueurs des côtés du triangle OM_nM_{n+1} sont

$$OM_n = |z_n| = U_n ; \quad OM_{n+1} = |z_{n+1}| = U_{n+1} \quad \text{et} \quad M_nM_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}U_n$$

Le triangle OM_nM_{n+1} est un triangle rectangle : En effet $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$ donc

$$OM_{n+1}^2 + M_nM_{n+1}^2 = \frac{1}{4}U_{n+1}^2 + \dots + \frac{1}{4}U_n^2 = U_n^2 = OM_n^2$$

EXERCICE 9

$A(1; 0)$; $B(-1; 0)$ deux points du plan

$z \neq 0$ et M un point d'affixe z ; M' d'affixe z' tel que $z \times z' = 1$

1) a) Lorsque $z = 2(1+i)$ et $z' = x'+iy'$; $z \times z' = 1$ équivaut à :

$$(2+2i)(x'+iy') = 1 \Leftrightarrow 2x'-2y'+(2x'+2y')i = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x'-2y'=1 \\ 2x'+2y'=0 \end{cases} \Rightarrow x' = \frac{1}{4} \text{ et } y' = -\frac{1}{4}$$

b) La droite (AB) a pour équation $y=0$ qui est l'axe des abscisses $z \times z' = 1$ équivaut à z' est l'inverse de z donc $|z'| = \frac{1}{|z|}$ et $\text{Arg} z' = -\text{Arg} z$ donc M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des

abscisses. Ce qui prouve que (AB) est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{O'M'} \right)$

On sait que $OA^2 = 1$ donc $OM \times OM' = 1$ car $OM = |z|$; $OM' = |z'|$ et $z \times z' = 1 \Rightarrow |z| \times |z'| = 1$

$$2) \text{ a) } \left(\frac{z+z'}{2} - 1 \right) \left(\frac{z+z'}{2} + 1 \right) = \left(\frac{z+z'}{2} \right)^2 - 1 = \frac{z^2 + 2zz' + z'^2}{4} - 1 = \frac{z^2 - 2 + z'^2}{4} = \left(\frac{z-z'}{2} \right)^2 \text{ car } zz' = 1$$

b) I milieu de $[M, M']$ implique que l'affixe de I est $\frac{z+z'}{2}$

$$\text{Donc } IA = \left| \frac{z+z'}{2} + 1 \right| ; IB = \left| \frac{z+z'}{2} - 1 \right| ; IM = \left| z - \frac{z+z'}{2} \right| = \left| \frac{z-z'}{2} \right|$$

D'après a) $\left(\frac{z+z'}{2} - 1 \right) \left(\frac{z+z'}{2} + 1 \right) = \left(\frac{z-z'}{2} \right)^2$ équivaut à $IA \times IB = IM^2$. (MM') est la bissectrice de

$\left(\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IB} \right)$ signifie que $d(M, (IA)) = d(M, (IB))$ et $d(M', (IA)) = d(M', (IB))$

EXERCICE 10

α un réel appartenant à $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

$$(E) : (1+iz)^3(1-itg\alpha) = (1-iz)^3(1+itg\alpha)$$

a) Si z est solution de (E) alors on a : $|(1+iz)^3(1-itg\alpha)| = |(1-iz)^3(1+itg\alpha)| \Leftrightarrow |(1+iz)^3| = |(1-iz)^3|$

car $|1-itg\alpha| = |1+itg\alpha|$ d'où $|1+iz| = |1-iz|$

b) Si $z = a + ib$ alors $1+iz = 1-b+ai$ et $1-iz = 1+b-ai$

$$|1-b+ai| = |1+b-ai| \Leftrightarrow (1-b)^2 + a^2 = (1+b)^2 + a^2 \Leftrightarrow (1-b)^2 = (1+b)^2 \Leftrightarrow b=0$$

d'où $z = a$ qui est réel

$$2) \text{ a) } \frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha} = (e^{i\alpha})^2$$

$$\text{b) } z = tg\varphi(E) \Leftrightarrow (1+itg\varphi)^3(1-itg\alpha) = (1-itg\varphi)^3(1+itg\alpha)$$

$$\left(\frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha} \right)^3 = \frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha} \Leftrightarrow (e^{2i\varphi})^3 = e^{2i\alpha} \Leftrightarrow 3\varphi = \alpha + 2k\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ avec } k \in \{0; 1; 2\}$$

c) Les solutions de (E) sont $z_0 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}$; $z_1 = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3} \right)$; $z_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3} \right)$

EXERCICE 11

1) $a = 16(1-i)$; $|a| = 16\sqrt{2}$; $\operatorname{Arg} a = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

les racines cubiques de a sont : $a_k = \left[2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right]$

$$a_0 = \left[2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{12} \right] = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$a_1 = \left[2\sqrt{2}; \frac{7\pi}{12} \right] = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$a_2 = \left[2\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4} \right] = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

2) a) $z_\lambda = 1 + i + 2\sqrt{2} e^{i\lambda} = 1 + i + 2\sqrt{2} (\cos \lambda + i \sin \lambda) = x_\lambda + y_\lambda i$

$$x_\lambda = 1 + 2\sqrt{2} \cos \lambda \quad \text{et} \quad y_\lambda = 1 + 2\sqrt{2} \sin \lambda$$

$$\text{b) } M_\lambda(x_\lambda; y_\lambda) \text{ avec } \begin{cases} x_\lambda = 1 + 2\sqrt{2} \cos \lambda \\ y_\lambda = 1 + 2\sqrt{2} \sin \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2} \cos \lambda = x_\lambda - 1 \\ 2\sqrt{2} \sin \lambda = y_\lambda - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8\cos^2 \lambda + 8\sin^2 \lambda = (x-1)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow (x_\lambda - 1)^2 + (y_\lambda - 1)^2 = 8$$

d'où l'ensemble (E) des points M_λ est le cercle de centre $I(1; 1)$ et de rayon $r = 2\sqrt{2}$

3) $[z - (1+i)]^3 = a \Leftrightarrow |z - (1+i)|^3 = |a| = 16\sqrt{2} \Leftrightarrow |z - (1+i)| = 2\sqrt{2}$ d'où z est l'afixe de

l'ensemble des points M du cercle de centre Ω d'afixe $1+i$ et de rayon $r = 2\sqrt{2}$. Ce qui est l'ensemble des points de (E).

EXERCICE 12

1) $z^n = 1 \Leftrightarrow z^n = [1; 2k\pi] \Leftrightarrow z_k = \left[1; \frac{2k\pi}{n} \right] = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ avec $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$

2) $z_0^p + z_1^p + \dots + z_{n-1}^p = S$

a) Si $p = kn$ alors

$$z_0^p + z_1^p + \dots + z_{n-1}^p = 1 + z_1^{kn} + z_2^{kn} + \dots + z_{n-1}^{kn} = 1 + (z_1^n)^k + (z_2^n)^k + \dots + (z_{n-1}^n)^k = 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

b) Si p n'est pas un multiple de n alors

$$S = 1 + z_1^p + z_2^p + z_3^p + \dots + z_{n-1}^p = 1 + z_1^p + z_1^{2p} + z_1^{3p} + \dots + z_1^{(n-1)p} = \frac{1 - (z_1^p)^n}{1 - z_1^p} = \frac{1 - (z_1^n)^p}{1 - z_1^p} = 0$$

EXERCICE 13

Soit $a \in [0; 2\pi]$

$$1) z^2 - (2^{a+1} \cos a)z + 2^{2a} = 0 \quad (1) \quad \Delta = [2^a \cos a]^2 - 2^{2a} = 2^{2a} [\cos^2 a - 1]$$

$$\Delta = 2^{2a} (-\sin^2 a) = -(2^a \sin a)^2 = [i 2^a \sin a]^2$$

$$z_1 = 2^a [\cos a + i \sin a] \quad ; \quad z_2 = 2^a [\cos a - i \sin a]$$

2) A d'afixe z_1 et B d'afixe z_2 . Le triangle OAB est équilatéral si $a = \frac{\pi}{6}$ car A et B sont symétriques par rapport à (Ox)

EXERCICE 14

Résoudre dans \mathbb{C}
$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}$$

Nous savons que $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = (z - z_1)(z^2 - (z_2 + z_3)z + z_2 z_3)$

$$= z^3 - (z_2 + z_3)z^2 + z_2 z_3 z - z_1 z^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3)z - z_1 z_2 z_3$$

$$= z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)z - z_1 z_2 z_3$$

Nous savons par ailleurs que z_1, z_2, z_3 sont solutions de l'équation du troisième degré suivant :

$$z^3 - z^2 + z - 1 = 0 \Leftrightarrow z^2(z - 1) + (z - 1) = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = i \text{ ou } z = -i$$

L'ensemble des solutions du système est $\{1; i; -i\}$

EXERCICE 15

1) L'équation $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$ admet comme solutions 1 et $\sqrt{2}$

2) $z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

$z + \frac{1}{z} = \sqrt{2} \Leftrightarrow z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} \text{ ou } z = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$

3) $P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2\sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$; $Z = z + \frac{1}{z}$

$$\frac{P(z)}{z^2} = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2 = Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + \sqrt{2}$$

$P(z) = 0$ nous ramène à l'équation de (1) d'où les solutions de $P(z) = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} ; z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} ; z_3 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} ; z_4 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

EXERCICE 16

$f(z) = z^3 + az^2 + bz + 8i$; $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2i$

1) $f(1 + i) = 0 \Leftrightarrow 2ai + (1 + i)b = 2 - 10i$

$f(2i) = 0 \Leftrightarrow b = -2ai$

La résolution de ces deux équations nous donne $a = 1 - 5i$ et $b = -10 - 2i$ d'où

$f(z) = z^3 + (1 - 5i)z^2 - (10 + 2i)z + 8i$

2) $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \Leftrightarrow f(z) = (z - 1 - i)(z - 2i)(z - z_3)$ avec $z_3 = -2 + 2i$ d'où

$f(z) = (z - 1 - i)(z - 2i)(z + 2 - 2i)$

3) $|z| = \sqrt{2}$; $\text{Arg } z_1 = \frac{\pi}{4}$; $|z_2| = 2$; $\text{Arg } z_2 = \frac{\pi}{2}$; $|z_3| = 2\sqrt{2}$; $\text{Arg } z_3 = -\frac{\pi}{4}$

EXERCICE 17

Soit (E) : $z^3 + (i-2)z^2 + 3(1-i)z + 2i - 2 = 0$

1) z_0 est une racine réelle de (E) équivaut à :
$$\begin{cases} z_0^3 - 2z_0^2 + 3z_0 - 2 = 0 \\ z_0^2 - 3z_0 + 2 = 0 \end{cases}$$

On obtient $z_0 = 1$. D'où (E) : $(z-1)(z^2 + bz - 2i + 2) = 0$.

On trouve $b = -1 + i$. (E) : $(z-1)(z^2 + (-1+i)z + 2 - 2i) = 0$.

Les racines de l'équation $(z^2 + (-1+i)z + 2 - 2i) = 0$ sont $z_1 = 1+i$ et $z_2 = -2i$.

Posons que $t = x + iy$: $|z_0 - t| = |1 - x - iy| = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$

$|z_1 - t| = \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2}$; $|z_2 - t| = \sqrt{x^2 + (2+y)^2}$

$|z_0 - t| = |z_1 - t| = |z_2 - t| \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^2 + (1-y)^2 = (1-x)^2 + y^2 \\ (1-x)^2 = (1-y)^2 = x^2 + (2+y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

d'où $t = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$

EXERCICE 18

Ainsi l'équation devient : $(z^2 - 2z + 2)(z^2 - 4z + 13) = 0$

Les solutions de l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$ sont $2+3i$ et $2-3i$

L'ensemble des solutions de l'équation $z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26 = 0$ est :

$S = \{1+i, 1-i, 2+3i, 2-3i\}$

EXERCICE 19

$z = \sqrt{1+\sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}$; $Z = z^4$. Après les calculs on obtient $z^4 = 8i$ donc $Z = 8i = [8; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

D'où les racines quatrièmes de Z sont de la forme $Z_k = [2^{\frac{3}{4}}; \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}]$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$Z_k = 2^{\frac{3}{4}} (\cos(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}))$

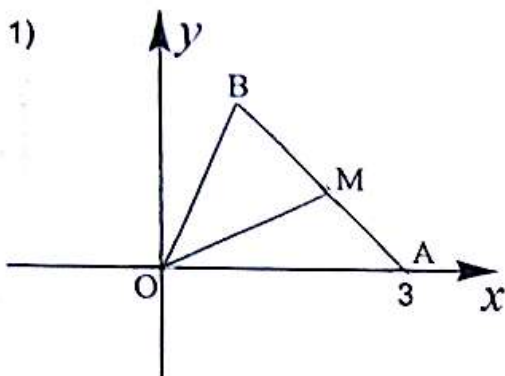
Puisque $z^4 = Z$ alors z est une racine quatrième de Z ainsi les racines quatrièmes de Z sont : $z, -z$ et $-iz$

avec $z = \sqrt{1+\sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}$. En donnant à k la valeur 0

On obtient $z_0 = 2^{\frac{3}{4}} (\cos \frac{\pi}{8} + i\sin \frac{\pi}{8}) = \sqrt{1+\sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2}-1}$

$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2^{3/4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

EXERCICE 20

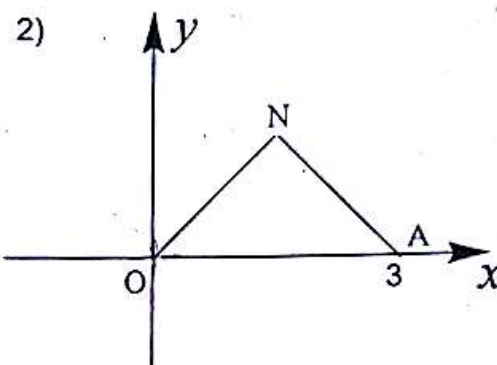


Le triangle OMA est rectangle. M étant le milieu de [AB] alors $AM = \frac{3}{2}$ d'où

$$OM^2 = OA^2 - AM^2 = 9 - \frac{9}{4} \Leftrightarrow OM = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{d'où } |z| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{L'angle } \left(\widehat{AOM} \right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ d'où } \text{Arg } z = \frac{\pi}{6}$$



L'angle $\widehat{AON} = \frac{\pi}{4}$ car le triangle OAN est isocèle et rectangle donc $\text{Arg } z = \frac{\pi}{4}$

$$ON^2 = \frac{1}{2} OA^2 \Leftrightarrow ON = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ d'où } |z| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

EXERCICE 21

$$z_1 = 2 + 2i \quad ; \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}$$

A est l'image de z_1 et B est l'image de z_2 .

a) Calculons l'affixe de z_3 de C :

C est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle de mesure de $\frac{5\pi}{6}$ équivalent à $\begin{cases} OC = OA \\ (\vec{OA}, \vec{OC}) = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$

$$OA = |z_1| = 2\sqrt{2} \Rightarrow OC = 2\sqrt{2}$$

$$OC = |z_3| = 2\sqrt{2} \Rightarrow |z_3| = 2\sqrt{2}$$

$$(\vec{OA}, \vec{OC}) = \arg z_3 - \arg z_1 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \arg z_3 = \frac{5\pi}{6} + \arg z_1$$

Soit θ_1 l'argument de z_1

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\arg z_3 = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$$

$$z_3 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \right) = -\sqrt{3} - 1 + i(1 - \sqrt{3})$$

b) Prouvons que $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ est un imaginaire pur

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{-\sqrt{3} - 1 + i(1 - \sqrt{3}) - 1 + i\sqrt{3}}{2 - 2i - 1 + i\sqrt{3}} = \frac{(-2 - \sqrt{3} + i)(1 - i(2 + \sqrt{3}))}{1 + (2 + \sqrt{3})^2} = \frac{i(8 + 4\sqrt{3})}{8 + 4\sqrt{3}} = i$$

donc $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ est un imaginaire pur.

$$\left| \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \right| = |i| = 1$$

c) $\left| \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \right| = \frac{BC}{BA} = 1 \Rightarrow BC = BA \Rightarrow$ le triangle ABC est isocèle.

D'autre part $\arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right) = (\vec{BC}, \vec{BA}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ donc le triangle ABC est rectangle

EXERCICE 22

1) $(o; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est un repère orthonormal direct du plan d'unité 1 cm

$$a = 2 - 2i\sqrt{3}, \quad b = 2 + 2i\sqrt{3}, \quad c = 8 \text{ on a : } |a| = 4; \quad |b| = 4 \quad |c| = 8$$

$$\arg(a) = -\frac{\pi}{3}, \quad \arg(b) = \frac{\pi}{3}$$

$$d'où \quad a = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \quad b = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad c = 8(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$2) \quad q = \frac{a - c}{b - c} = \frac{-6 - 2i\sqrt{3}}{-6 + 2i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \text{ d'où } q = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

on a $|q| = 1 \Rightarrow |a - c| = |b - c|$ alors $AC = BC$ d'où le triangle ABC est isocèle et puisque

$$\arg(q) = (\vec{CB}, \vec{CA}) = \frac{\pi}{3} \text{ donc le triangle ABC est équilatéral.}$$

3) Déterminons le barycentre G des points pondérés $(A, |a|)$, $(B, |b|)$, $(C, |c|)$

$$\text{On a : } 4\vec{GA} + 4\vec{GB} + 8\vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$$

G a pour affixe $z_G = \frac{a + b + 2c}{4} = 5$; donc G est le point de coordonnées (5, 0) dans le repère

$(o; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

4) Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$

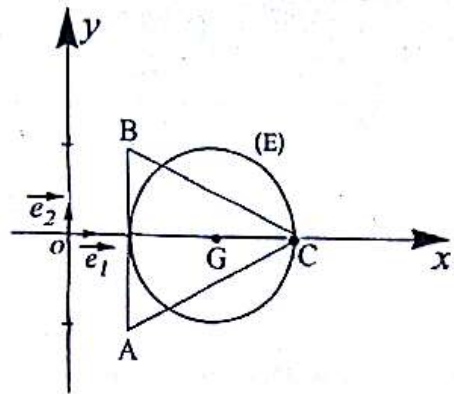
$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\| \Leftrightarrow \|4\vec{MG}\| = \|\vec{CA} + \vec{CB}\|$$

Soit I le milieu de [BC]

$$\|4\vec{MG}\| = \|\vec{CA} + \vec{CB}\| \Leftrightarrow \|\vec{MG}\| = \|2\vec{CI}\|$$

$$\|\vec{MG}\| = \frac{1}{2}\|2\vec{CG}\| \Leftrightarrow MG = GC = 3 \text{ d'où (E) est le cercle de centre G et de rayon 3.}$$

Construction de (E) : Voir figure



EXERCICE 23

1) a) Soit à résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (2 + \sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$

$$\Delta = \left[-(2 + \sqrt{3})^2 - 4(2 + \sqrt{3}) \right] = -1 = i^2$$

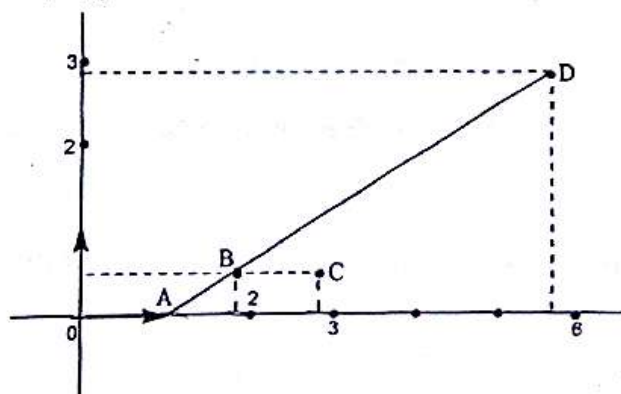
$$z_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$S = \left\{ \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; \frac{2 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$$

c) $u = z + 1 \Leftrightarrow u = \frac{4 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$$v = u^2 - 2 \Leftrightarrow v = \frac{19 + 8\sqrt{3}}{4} + \frac{4 + \sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{4} - 2 \Leftrightarrow v = \frac{5 + 4\sqrt{3}}{2} + \frac{4 + \sqrt{3}}{2}i$$

Plaçons dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixe respectives 1, z_1 , u et v dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$



c) Soit à démontrer que les points A, B et D sont alignés

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \vec{AD} \begin{pmatrix} \frac{3 + 4\sqrt{3}}{2} \\ \frac{4 + \sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \left(\vec{AB}, \vec{AD} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3 + 4\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4 + \sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{4\sqrt{3} + 3 - 3 - 4\sqrt{3}}{4}$$

$$\det_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} \left(\vec{AB}, \vec{AD} \right) = 0 \text{ d'où les points A, B et D sont alignés}$$

ARITHMETIQUE :

~ ENONCES ~

EXERCICE 1

1) Les entiers \overline{ab} et \overline{ba} sont écrits en base quatre.

Résoudre le système en examinant toutes les possibilités pour $\alpha \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} \overline{ba} - \overline{ab} = \alpha \\ a + b + 3 = \overline{ab} \end{cases}$$

2) a et b prenant les valeurs trouvées en 1), écrire en base dix puis en base deux chacun des entiers naturels $\overline{3a3b}$ (écrits en base 4).

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

a) l'équation $3x - 5y = 6$

b) le système
$$\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ y \equiv x^2 [5] \end{cases}$$

EXERCICE 3

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n-2) = (n+1)(n+2) \dots \times 2n$$

EXERCICE 4

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; 3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1}$ est divisible par 11

2) Déterminer l'ensemble des entiers naturels a tels que $3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1}$ soit divisible par 11 pour tout entier naturel n.

EXERCICE 5

1) Démontrer que pour tout entier naturel p, $81p^5 - 45p^3$ est divisible par 5.

2) Déterminer les entiers naturels p tels que $p^3 + p - 2$ soit divisible par 7.

EXERCICE 6

A tout couple (x, n) d'entiers x et n supérieurs ou égaux à deux, on associe le Nombre entier noté $a(x, n)$, qui, dans le système de numération de base x , s'écrit avec n chiffres dont le premier et le dernier sont des 1 et les autres (s'il y en a) des zéros.

Ainsi $a(3, 2) = 11$ en base 3 qui est l'entier quatre.

$$a(3, 3) = \overline{101}^3 = 10$$

a) Montrer que quelle que soit la base x , $a(x, n)$ est divisible par $a(x, 2)$ si n est paire et ne l'est pas si n est impaire.

b) A quelles conditions les entiers x et n doivent-ils satisfaire pour que le couple $a(x, n)$ soit divisible par 3.

EXERCICE 7

Soit N un entier naturel tel que, en numération décimale, N s'écrit \overline{abcd} et que l'entier qui s'écrit \overline{bcda} par 7.

1) Montrer que si $a = 7$ alors $\overline{bcda} - 10N \equiv 0 \pmod{7}$

En déduire que pour cette valeur de a , N est divisible par 7.

2) Montrer que $10N - 3a$ est divisible par 7 ; en déduire que si N est divisible par 7, alors $a = 7$

EXERCICE 8

1) Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans le système de numération de base 13 est $N = \overline{25 \times 3}$. Pour quelles valeurs de x : N est-il divisible par 6 ? divisible par 4 ? divisible par 24 ?

2) Déterminer l'ensemble des éléments x de \mathbb{Z} qui vérifient : $3x \equiv 23 \pmod{7}$. En déduire l'ensemble des courbes (x, y) de \mathbb{Z}^2 qui vérifient $3x - 7y = 23$

(D'après Bac SET 1991)

EXERCICE 9

1) Trouver trois naturels a, b, c différents de 1, premiers entre eux deux à deux et tels que $a \times b \times c = 495$

2) x, y, z étant des chiffres de la base dix, on considère le nombre $A = \overline{x13y8z}$ en base dix. Déterminer tous les triplets (x, y, z) pour lesquels A est multiple de 495.

(D'après Bac SET 1980)

EXERCICE 10

Les chiffres dans le système de numération de base seize sont : 0, 1, 2, ..., 9, a, b, c, d, e, f .

1) Calculer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne des nombres M par N dans les cas suivants : (la disposition pratique de la technique de la division en base seize est exigée)

a) $M = \overline{cafe}$ et $N = \overline{bac}$

b) $M = \overline{abada}$ et $N = \overline{def}$

2) Vérifier les résultats du 1) à l'aide des écritures de M, N, Q et R dans le système décimal

3) Déterminer deux entiers relatifs x et y tels que $51966x + 2988y = 18$; 51966 et 2988 sont donnés dans le système de numération de base dix.

EXERCICE 11

1) Montrer que si p et q sont deux entiers relatifs premiers entre eux, il en est de même de p et q^3 .

2) On se propose de trouver les racines rationnelles de l'équation (1) : $3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0$

a) soit $\frac{a}{b}$ un nombre rationnel écrit sous forme irréductible. Montrer que, s'il est solution de (1) alors a divise 4 et b divise 3.

b) Montrer qu'une solution de (1) ne peut être négative.

c) Déduire de ce qui précède que la seule solution rationnelle de (1) est $\frac{2}{3}$.

3) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0$

EXERCICE 12

- 1) Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 7^n par 10.
- 2) Dans le système de numération décimale, déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le chiffre des unités de l'entier $A(n)$ définie par $A(n) = 1 + 7^2 + \dots + 7^n$

EXERCICE 13

- 1) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $17q - 11p = 2$
- 2) On considère par \bar{n} la classe d'équivalence modulo 187 de l'entier $n \in \mathbb{Z}$. Résoudre dans $\mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - \bar{1} = \bar{0}$

EXERCICE 14

Soit E l'anneau $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$, la classe de l'entier naturel n sera noté \bar{n}

- 1) Soit f l'application de E dans E définie par $f(x) = 17x + 9$
Trouver l'inverse de 17 . Résoudre dans E l'équation $f(x) = \bar{0}$
- 2) Montrer que f est une bijection dont on donnera la bijection réciproque.

EXERCICE 15

Résoudre dans \mathbb{N} l'équation : $3^{3x} - 5x3^{2x} - 3^x + 5 \equiv 0[11]$

EXERCICE 16

- 1) Déterminer le PGCD des nombres 21590 et 9525
- 2) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x pour lesquels $34x \equiv 2[5]$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $21590x + 9525y = 1270$

EXERCICE 17

On désigne par \bar{a} la classe d'équivalence modulo 15 de l'entier a .

- 1) Déterminer les couples (\bar{a}, \bar{b}) tels que $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$, $\bar{a} \neq \bar{0}$ et $\bar{b} \neq \bar{0}$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - \bar{6}x + \bar{5} = \bar{0}$
- 3) Résoudre dans $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{3}y = \bar{0} \\ \bar{2}x + y = \bar{5} \end{cases}$$

EXERCICE 18

b est un entier strictement positif supérieur à 1. On rappelle que $b^2 - 1 = (b+1)(b-1)$

- 1) Quel est le PGCD de b^2 et $(b-1)$?
- 2) Quel est l'ensemble des solutions dans \mathbb{Z}^2 de l'équation $b^2x + (b-1)y = 1$?

APPLICATION NUMERIQUE : Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $9x + 2y = 1$

EXERCICE 19

Déterminer les couples d'entiers naturels (a, b) tels que

- 1) $\begin{cases} a + b = 168 \\ \text{PGCD}(a, b) = 21 \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} \text{PGCD}(a, b) = 27 \\ \text{PPCM}(a, b) = 108 \end{cases}$
- 3) $(a, b) \neq (0, 0) \quad \text{PGCD}(a, b) + \text{PPCM}(a, b) = b + 9$

EXERCICE 20

Déterminer les paires d'entiers naturels $\{a, b\}$ qui vérifient :
 $n - 16d = 1977$ où $n = \text{PPCM}(a, b)$ et $d = \text{PGCD}(a, b)$

EXERCICE 21

- 1) Etablir que $\forall (a, b, q) \in \mathbb{Z}^3, a \wedge b = b \wedge (a - bq)$. La notation $a \wedge b$ désigne le PGCD des entiers relatifs a et b .
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad (5n^3 - n) \wedge (n + 2) = (n + 2) \wedge 38$
- 3) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(n + 2)$ divise $(5n^3 - n)$.
- 4) Quelles sont les valeurs possibles du PGCD de $5n^3 - n$ et $n + 2$?
- 5) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(5n^3 - n) \wedge (n + 2) = 19$

EXERCICE 22

- 1) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (1) : $5x - 4y = 2$.
- 2) On considère l'ensemble des couples (a, b) solutions de (1)
 - a) Quelles sont les valeurs possibles du PGCD de a et b ?
 - b) Montrer qu'il existe un seul couple (a, b) dont le PPCM de a et b est 60 et le PGCD de a et b est 2.

EXERCICE 23

- 1) Démontrer, quel que soit l'entier naturel n , on a : $3^{2n+3} + 2^{n+3} \equiv 0 \pmod{7}$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + 2x + 6 = 0$
- 3) Résoudre le système $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$ m étant le PPCM des entiers a et b .

(D'après Bac SET. MTL MTGC. 1998)

EXERCICE 24

- 1) On sait que : $10^3 - 1 = 9 \times 111$

$$10^3 - 1 = 7 \times 11 \times 13$$

Pour tout entier naturel, on considère le nombre $A = 10^{9n} + 2 \times 10^{6n} + 2 \times 10^{3n} + 1$.
 Déterminer le reste de la division de A par 111.

- 2) On suppose n impair. Démontrer que A est divisible par 7, par 11, par 13.
- 3) On suppose n pair
 - a) Démontrer que $A - 6$ est divisible par 11, par 7, par 13.
 - b) Quel est le reste de la division de A par 111×1001 ?

(D'après Composition 1^{re} Période District de Bko 1997)

(D'après Composition 1^{re} Période District de Bko 1997)

EXERCICE 25

- 1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division de 4^n par 7.
- 2) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division de $A = 851^{1^n} + 851^{2^n} + 851^n + 2$ par 7.
- 3) On considère le nombre B qui s'écrit dans le système de numération à base quatre, $B = 2103211$. Déterminer dans le système décimal le reste de la division du nombre B par 7.

~ SOLUTIONS ~

EXERCICE 1

1) Les racines ab et ba sont écrit en ba quatre :

$$\begin{cases} \overline{ba} - \overline{ab} = \alpha \\ a + b + 3 = ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b + a - 4a - b = \alpha \Rightarrow 3a(b - a) = \alpha \quad (1) \\ a + b + 3 = 4a + b \Rightarrow a = 1 \quad (2) \end{cases}$$

L'équation (1) est équivalente aux cas suivants :

- Si $\alpha = 0$ alors $b = 1$ et on a : $\overline{3131}^4 = 221 = \overline{11011101}^2$
- Si $\alpha = 3$ alors $b = 2$ et on a : $\overline{3132}^4 = 222 = \overline{11011110}^2$
- Si $\alpha = 6$ alors $b = 3$ et on a : $\overline{3133}^4 = 223 = \overline{11011111}^2$

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

a) L'équation $3x - 5y = 6$:

$$3x - 5y = 6 \Leftrightarrow 3x = 6 + 5y \Leftrightarrow 3x \equiv 6[5] \Leftrightarrow x \equiv 2[5] \Leftrightarrow x = 5k + 2$$

On obtient dans $3x - 5y = 6$, $y = 3k$

D'où l'ensemble solution dans \mathbb{Z}^2 de $3x - 5y = 6$ est $S = \{(5k + 2, 3k) ; k \in \mathbb{Z}\}$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ y \equiv x^2[5] \end{cases}$. D'après a) :

$$3x - 5y = 6 \Rightarrow x = 5k + 2 ; y \equiv x^2[5] \Leftrightarrow y \equiv (5k + 2)^2[5] \Leftrightarrow y \equiv 4[5] \Leftrightarrow y = 5k' + 4$$

Puisque nous avons aussi $y = 3k$ alors on obtient $5k' + 4 = 3k$

Soit $-5k' + 3k = 4 \Leftrightarrow k = 5\alpha + 2$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$) d'où l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ du système

est : $x = 5k + 2 = 25\alpha - 8$; $y = 3k = 15\alpha - 6$ ie $S = \{(25\alpha - 8, 15\alpha - 6) \mid \alpha \in \mathbb{Z}\}$

EXERCICE 3

Déterminons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n - 2) = (n + 1)(n + 2) \dots 2n$$

Nous savons que pour $n = 1 : 2 = 2$ de même pour $n = 2$ on a $2 \times 6 = 3 \times 4 = 12$

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n ie $2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n - 2) = (n + 1)(n + 2) \dots 2n$ et

montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$ ie

$$2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n - 2)(4n + 2) = (n + 2)(n + 3) \times \dots \times 2(n + 1)$$

D'après l'hypothèse de récurrence $2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n - 2) = (n + 1)(n + 2) \times \dots \times 2n$ donc

$$2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n - 2)(4n + 2) = (n + 1)(n + 2) \times \dots \times 2n \times (4n + 2)$$

$$= (n + 1)(n + 2) \times \dots \times 2n \times (2n + 1) \times 2 = (n + 2) \times (n + 3) \times \dots \times 2n \times (2n + 1) \times 2(n + 1)$$

$$= (n + 2)(n + 3) \dots 2(n + 1)$$

Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $(n + 1)$

EXERCICE 4

1) Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1}$ est divisible par 11 :

$$3^{2n+1} = 3 \times 3^{2n} = 3 \times 9^n \quad ; \quad 4^{3n+1} = 4 \times 4^{3n}$$

Nous savons que $4^n \equiv 9[11]$ donc $2 \times 4^{3n+1} = 8 \times 4^{3n} \equiv 8 \times 9^n[11]$

$$\text{Ainsi } 3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1} \equiv (3 \times 9^n + 8 \times 9^n)[11] \Leftrightarrow 3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1} \equiv 0[11]$$

$$\text{Car } 3 \times 9^n + 8 \times 9^n = 11 \times 9^n \equiv 0[11]$$

$$2) \quad 3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1} \equiv 0[11] \Rightarrow 3 \times 9^n + 4 \cdot a \cdot 9^n \equiv 0[11] \Rightarrow 4a + 3 \equiv 0[11] \Leftrightarrow a \equiv 2[11]$$

$$\text{d'où } a \in \{11k + 2\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

EXERCICE 5

1) Démontrons que pour tout naturel p $81p^5 - 45p^3 + 4p$ est divisible par 5

Nous savons que $81 \equiv 1[5]$, $45 \equiv 0[5]$ et $4 \equiv 4[5]$ alors $81p^5 - 45p^3 + 4p \equiv p^5 + 4p[5]$

$$\text{Pour } p = 1 \quad p^5 + 4p = 5 \equiv 0[5]$$

$$\text{Pour } p = 2 \quad p^5 + 4p = 40 \equiv 0[5]$$

Supposons que pour tout $p \in \mathbb{N}$ $p^5 + 4p \equiv 0[5]$ montrons alors que $(p+1)^5 + 4(p+1) \equiv 0[5]$

$$\text{On a : } (p+1)^5 + 4(p+1) = p^5 + 4p + 5(p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p + 1) \equiv 0[5] \text{ par } p^5 + 4p \equiv 0[5]$$

Par suite, pour tout entier naturel p , $81p^5 - 45p^3 + 4p$ est divisible par 5.

2) Déterminons les entiers naturels p tels que $p^3 + p - 2$ soit divisible par 7.

Pour $p \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $p^3 + p - 2$ n'est pas divisible par 7

$$\text{Pour } p = 1 \quad p^3 + p - 2 = 0 \equiv [7]$$

$$\text{Pour } p = 3 \quad p^3 + p - 2 = 28 \equiv [7]$$

Par suite $p^3 + p - 2$ est divisible par 7 si $p = 1 + 7k$ ou $p = 3 + 7k$, $k \in \mathbb{N}$

EXERCICE 6

Soit $a(x, n) = \overline{100 \dots 001}^x$ (n chiffres)

$$a) \quad a(x, n) = \overline{100 \dots 001}^x \quad (n \text{ pair}) \quad a(x, 2) = \overline{11}^x$$

Lorsque n est pair la somme des chiffres de rang pair est 1 et celle des chiffres de rang impair est 1 :

$$1 - 1 = 0 \equiv 0[\overline{11}^x] \text{ d'où } N \text{ est divisible par } a(x, 2)$$

Lorsque n est impair la somme des chiffres de rang pair est 2 et celle des chiffres de rang impair est 0 :

$$2 - 0 = 2 \text{ n'est pas divisible par } \overline{11}^x \text{ d'où n'est pas divisible par } \overline{11}^x$$

$$b) \quad a(x, n) = x^{n-1} - 1 \equiv 0[3] \text{ ssi } x^{n-1} \equiv 2[3]$$

pour que x^{n-1} soit congru à 2 modulo 3 il faut que $x \equiv 2[3]$ et $n \equiv 1[3]$

En conclusion $a(x, n)$ est divisible par 3 si $x = 3k + 2$ et $n = 3k' + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $k' \in \mathbb{N}$

EXERCICE 7

$$N = \overline{abcd} \text{ et } \overline{bcda} \equiv 0[7]$$

1) Montrons que : si $a = 7$ alors $\overline{bcda} - 10N \equiv 0[7]$

$$\text{On a } \overline{bcda} - 10N = b.10^3 + c.10^2 + a - 10(a.10^3 + b.10^2 + c.10 + d)$$

$$a = (1 - 10^4)$$

$$\text{Si } a = 7 \text{ alors } \overline{bcda} - 10N = 7(1 - 10^4) \equiv 0[7]$$

$$\text{D'autre part } \begin{cases} \overline{bcda} - 10N \equiv 0[7] \\ \overline{bcda} \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow 10N \equiv 0[7] \Rightarrow N \equiv 0[7]$$

car 10 n'est pas divisible par 7

2) Montrons que $10N - 3a$ est divisible par 7

$$10N - 3a = a.10^4 + b.10^3 + c.10^2 + d - 3a = b.10^3 + c.10^2 + d.10 + a + a.10^4 - 4a,$$

$$10N - 3a = \overline{bcda} + a(10^4 - 4)$$

$$10 \equiv 3[7] \Rightarrow 10^4 \equiv 4[7] \Leftrightarrow 10^4 - 4 \equiv 0[7] \Leftrightarrow a(10^4 - 4) \equiv 0[7]$$

$$\text{Puisque } \overline{bcda} \equiv 0[7] \text{ alors } 10N - 3a = \overline{bcda} + a(10^4 - 4) \equiv 0[7]$$

$$\text{Si } N \text{ est divisible par 7 alors } 10N \equiv 0[7] \text{ et comme } 10N - 3a \equiv 0[7] \text{ alors } 3a \equiv 0[7] \Rightarrow a \equiv 0[7]$$

$$\text{Or } a \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\} \text{ donc } a = 7$$

EXERCICE 8

1) $N = 25 \times 3$ dans le système de numération de base 13

$$N = 2.13^3 + 5.13^2 + x.13 + 3$$

$$\text{on a : } 13 \equiv 1[6] \Rightarrow N \equiv 2 + 5 + x + 3[6] \Leftrightarrow N \equiv x + 4[6]$$

$$N \equiv 0[6] \Leftrightarrow x + 4 \equiv 0[6] \Rightarrow x + 4 = 6k \Rightarrow x = 6k - 4, k \in \mathbb{N}^*$$

$$x \in \{0, 1, 2, \dots, 12\} \Rightarrow 0 \leq 6k - 4 \leq 12 \Rightarrow k \in \{1, 2\}$$

$$\text{pour } k = 1, \quad x = 2$$

$$\text{pour } k = 2, \quad x = 8$$

$$\text{On a aussi : } 13 \equiv 1[4] \Rightarrow N \equiv 2 + 5 + x + 3[4] \Leftrightarrow N \equiv x + 2[4]$$

$$N \text{ divisible par 4} \Leftrightarrow x + 2 \equiv 0[4] \Leftrightarrow x = 4k - 2, k \in \mathbb{N}^*$$

$$x \in \{0, 1, 2, \dots, 12\} \Rightarrow 0 \leq 4k - 2 \leq 12 \Rightarrow k \in \{1, 2, 3\}$$

$$\text{pour } k = 1, \quad x = 2$$

$$\text{pour } k = 2, \quad x = 6$$

$$\text{pour } k = 3, \quad x = 10$$

N est divisible par 24 ssi N est divisible par 4 et par 6 car $24 = 6 \times 4$

$$N \text{ divisible par 24} \Leftrightarrow x \in \{2, 8\} \cap \{2, 6, 10\} \Leftrightarrow x = 2$$

$$2) 3x \equiv 23[7] \Leftrightarrow 3x = 7k + 23 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = 7k + 23 \Rightarrow \frac{3}{7}k + \frac{23}{7} \Leftrightarrow \frac{3}{7}k + 2 \text{ puisque } 7 \equiv 1[3] \text{ et } 23 \equiv 2[3]$$

$$3 \mid k + 2 \Rightarrow k + 2 = 3\alpha \Rightarrow k = 3\alpha - 2, \alpha \in \mathbb{Z} \text{ d'où :}$$

$$3x = 7k + 23 \Leftrightarrow 3x = 7(3\alpha - 2) + 23$$

$$3x = 21\alpha + 9 \Rightarrow x = 7\alpha + 3$$

$$\text{donc } 3x \equiv 23[7] \Leftrightarrow x \equiv 7\alpha + 3; \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\text{On a : } 3x - 7y = 23 \Leftrightarrow 7y = 3x - 23 \Leftrightarrow 7y = 3(7\alpha + 3) - 23$$

$$7y = 21\alpha - 14 \Leftrightarrow y = 3\alpha - 2, \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\text{donc } 3x - 7y = 23 \Leftrightarrow (x, y) \in \{(7\alpha + 3; 3\alpha - 2) \mid \alpha \in \mathbb{Z}\}$$

EXERCICE 9

1) La décomposition en produit de facteurs premiers de 495 nous donne

$$495 = 5 \times 9 \times 11 \text{ d'où } (a, b, c) = (5, 9, 11)$$

2) $x; y; z$ étant des chiffres du système décimal on donne $A = \overline{x13y8z}$; A est divisible par 495 ssi il est à la fois divisible par 5, 9 et 11

$$A \equiv 0[5] \Rightarrow z = 0 \text{ ou } z = 5; A \equiv 0[9] \Leftrightarrow x + y + 3 \equiv 0[9]$$

$$A \equiv 0[11] \Rightarrow y + z - x + 1 \equiv 0[11]$$

• Si $z = 0$ alors on aura le système
$$\begin{cases} x + y + 3 = 9k \\ -x + y + 1 = 11k' \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 9 \text{ et } 0 \leq y \leq 9 \Rightarrow 3 \leq x + y + 3 \leq 21 \Leftrightarrow 3 \leq 9k \leq 21 \Leftrightarrow k \in \{1, 2\}$$

$$-9 \leq x \leq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 9 \Rightarrow -8 \leq -x + y + 1 \leq 10 \Leftrightarrow -8 \leq 11k' \leq 10 \Rightarrow k' = 0$$

Ainsi on aura :
$$\begin{cases} x + y + 3 = 9 \\ -x + y + 1 = 0 \end{cases} \quad (\text{pas de solution dans } \mathbb{N}^2)$$

$$\begin{cases} x + y + 3 = 18 \\ -x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 7 \text{ et } x = 8. \text{ Dans ce cas } A = 813780$$

• Si $z = 5$ on aura le système
$$\begin{cases} x + y + 3 = 9k \\ -x + y + 1 = 11k' \end{cases}$$

$$8 \leq x + y + 8 \leq 26 \Leftrightarrow 8 \leq 9k \leq 26 \Leftrightarrow k \in \{1, 2\}$$

$$-8 \leq -x + y \leq 15 \Leftrightarrow -3 \leq 11k' \leq 15 \Rightarrow k' \in \{0, 1\}$$

La résolution des 4 systèmes obtenus en faisant varier k et k' dans leurs ensemble nous donne $x = 8$ et $y = 2$; ce qui correspond à $A = 813285$. En conclusion A est divisible par 495 si et seulement si $A \in \{813780, 813285\}$.

EXERCICE 10

1) * On divise \overline{cafe} par \overline{bac} (ou ca par ba ou c par b)

Disposition

$$\begin{array}{r} \text{a) } \overline{cafe} \mid \overline{bac} \\ \underline{-\overline{bac}} \\ 103e \\ \underline{-\overline{bac}} \\ 492 \end{array} = \overline{11}$$

b) $c = 12 = 11 + 1 = 1 \times b + 1$

On divise $\overline{103e}$ par \overline{bac} (on divise $\overline{10}$ par b). $\overline{10} = 16 = 11 + 5 = 1 \times b + 5$ d'où $\overline{cafe} = 11 \times \overline{bac} + \overline{492}$

$$\begin{array}{r|l} \overline{abada} & \overline{bac} \\ - \overline{a734} & \\ \hline 479a & \\ - 45ab & \\ \hline 1ef & \end{array} = \overline{c5}$$

$\overline{aba} < \overline{def}$ donc on divise \overline{abad} par \overline{def} ou \overline{ab} par d :

$$\overline{ab} = 10 \times 16 + 11 = 10(14 + 2) + 11 = 12 \times 14 + 3 = c \times d + 3$$

$$c \times f = 12 \times 15 = 11 \times 16 + 4 = \overline{b4}$$

$$c \times e = 12 \times 14 = 12(16 - 2) = 10 \times 16 + 8 = \overline{a8}$$

$$c \times d = 12 \times 13 = 9 \times 16 + 12 = \overline{9c}$$

d'où $c \times \overline{def} = \overline{a479}$. On procède comme précédemment pour déterminer le quotient de $\overline{479a}$ par \overline{def} et le reste.

En conclusion $\overline{abada} = \overline{def} \times \overline{c5} + \overline{1ef}$

2) Vérification : $\overline{cafe}^{16} = 12 \times 16^3 + 10 + 16 + 15 + 16 + 14 = 51955$ (en base dix)

$$\overline{11}^{16} = 16 + 1 = 17 \quad ; \quad \overline{bac}^{16} = 11 \times 16^2 + 10 \times 16 + 12 = 2988$$

$$\overline{492}^{16} = 4 \times 16^2 + 9 \times 16 + 2 = 1170 \quad ; \quad 51966 = 17 \times 2988 + 1170$$

$$\overline{abada}^{16} = 10 \times 10^4 + 11 \times 10^3 + 10 \times 16^2 + 13 \times 16 + 10 = 703194 \text{ (en base dix)}$$

$$\overline{def} = 3567 \quad ; \quad \overline{c5} = 197 \quad ; \quad \overline{ief} = 495$$

$$\text{d'où } 3567 \times 197 + 495 = 703194$$

$$3) \quad 51966x + 2988y = 18 \quad 2887x + 166y = 1$$

L'algorithme d'Euclide nous donne :

	17	2	1	1	1
2887	166	65	36	29	7
65	36	29	7	1	

Nous en déduisons les relations suivantes :

$$65 = 2887 - 17 \times 166 \quad ; \quad 36 = 166 - 2 \times 65 \quad ; \quad 29 = 65 - 1 \times 36 \quad ; \quad 7 = 36 - 1 \times 29 \text{ et } 1 = 29 - 4 \times 7 \text{ d'où}$$

$$1 = 29 - 4 \times (36 - 29) \Leftrightarrow 1 = -4 \times 36 + 5 \times 29 \Leftrightarrow 1 = -4 \times 36 + 5(65 - 36)$$

$$1 = -9 \times 36 + 5 \times 65 \Leftrightarrow 1 = -9(166 - 2 \times 65) + 5 \times 65 \Leftrightarrow 1 = -9 \times 166 + 23 \times 65$$

$$\Leftrightarrow 1 = -9 \times 166 + 23 \times (2887 - 17 \times 166) \Leftrightarrow 1 = 2887 \times 23 + 166 \times (-400)$$

Une solution particulière de l'équation $2887X + 166Y = 1$ est alors $(23, -400)$.

L'ensemble de ses solutions dans \mathbb{Z}^2 est : $S = \{(-166k + 23; 2887k - 400); k \in \mathbb{Z}\}$

EXERCICE 11

1) Nous savons que si p et q sont deux entiers relatifs tels que $p \wedge q = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $p \wedge q^n = 1$; en particulier $p \wedge q^3 = 1$

2) Soit l'équation (1) : $3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0$

a) Soit $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $a \wedge b = 1$, si $\frac{a}{b}$ est une solution de (1) alors $3\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 6\left(\frac{a}{b}\right) - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 3a^3 - 2a^2b + 6ab^2 - 4b^3 = 0$$

$$a(3a^2 - 2ab + 6b^2) - 4b^3 = 0 \Leftrightarrow a(3a^2 - 2ab + 6b^2) = 4b^3$$

En posant $k = 3a^3 - 2ab + 6b^2$ alors on a : $ka = 4b^3$; a et b^3 étant premier entre eux, d'après Gauss b divise 4. De même $\frac{a}{b}$ solution de (1), si $3a^3 - b(2a^2 - 6ab + 4b^2) = 0 \Leftrightarrow 3a^3 = k'b$.

$$(k' = 2a^2 - 6ab + 4b^2)$$

En vertu du même théorème de Gauss b divise 3

b) Soit x une solution de (1), supposons $x < 0$ alors $a > 0$ tel que $x = -a$ donc

$$3(-a)^3 - 2(-a)^2 + b(-a) - 4 = 0 \Leftrightarrow 3a^3 + 2a^2 + 6a + 4 = 0 \text{ ce qui est impossible car } a \text{ étant positif alors } 3a^3 + 2a^2 + 6a + 4 > 0 \text{ d'où } x \text{ ne peut être négatif}$$

c) D'après les questions a) et b), si $\frac{a}{b}$ est solution de (1), alors $a \in \{1, 2, 4\}$ et $b \in \{1, 3\}$; on vérifie aisément que seule $\frac{3}{2}$ est solution de (1)

3) $\frac{3}{2}$ étant une solution de (1), $3x^3 - 2x^2 + 6x - 4$ est divisible par $x - \frac{2}{3}$. La division nous donne

$$3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = \left(x - \frac{2}{3}\right)(3x^2 + 6) \text{ ainsi (1) } x = \frac{2}{3} \text{ ou } 3x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2 \Leftrightarrow x = i\sqrt{2} \text{ où } x = -i\sqrt{2}.$$

Les solutions dans \mathbb{C} de (1) sont : $\frac{2}{3}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$.

EXERCICE 12

1) n étant un entier naturel, on a : $7^0 \equiv 1[10], 7^1 \equiv 7[10], 7^2 \equiv 9[10]$, et $7^{4k} \equiv 1[10], 7^{4k} \equiv 7[10]$
 $7^{4k+2} \equiv 9[10]$ et $7^{4k+3} \equiv 3[10]$ avec $k \in \mathbb{N}$

2) $A(n) = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^n$ nous remarquons que la somme des restes est :

$$1 + 7 + 9 + 3 = 20 \text{ (le chiffre des unités est 0)}$$

- Si $n = 4k$ le chiffre des unités de $A(n)$ est 1

- Si $n = 4k + 1$ le chiffre des unités de $A(n)$ est $1 + 7 = 8$

- Si $n = 4k + 2$ le chiffre des unités de $A(n)$ est $1 + 7 + 9 = 17$ qui est 7

- Si $n = 4k + 3$ le chiffre des unités de $A(n)$ est celui de $17 + 3 = 20$ qui est 0.

EXERCICE 13

1) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $17q - 11p = 2$

$$17q - 11p = 2 \Leftrightarrow 17q \equiv 2[11] \Leftrightarrow 6q \equiv 2[11] \Leftrightarrow q \equiv 4[11] \Leftrightarrow q = 11k + 4$$

On obtient $p = 17k + 6$; l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de $17q - 11p = 2$ est

$$S = \{(17k + 6; 11k + 4), k \in \mathbb{Z}\}$$

2) \bar{n} désigne la classe de n dans $\mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$

$$\text{Résoudre } \mathbb{Z}/187\mathbb{Z} \Rightarrow x^2 - \bar{1} = \bar{0}$$

$$x^2 - \bar{1} = \bar{0} \Leftrightarrow (x - \bar{1})(x + \bar{1}) = \bar{0} \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \equiv 0[187] \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = (11 \times 17)\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Z})$$

$$x^2 - \bar{1} = \bar{0} \Leftrightarrow [(x-1=11p \text{ et } x+1=17q) \text{ ou } (x-1=17q \text{ et } x+1=11p)]$$

$$* \begin{cases} x-1=11p \\ x+1=17q \end{cases} \Rightarrow 17q-11p=2. \text{ Cela nous donne } p=17k+6.$$

$$\text{Dans ce cas } x=187k+67 \Leftrightarrow x=\overline{67}$$

$$* \begin{cases} x-1=17q \\ x+1=11p \end{cases} \Rightarrow 17q+11p=2 ; \text{ on obtient } p=17k-6.$$

$$\text{Dans ce cas } x=187k-67 \Leftrightarrow x=\overline{120}$$

Dans $\mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$ $x=\bar{1}$ et $x=-\bar{1}=\overline{186}$ sont aussi solutions

En conclusion les solutions de l'équation $x^2 - \bar{1} = \bar{0}$ sont $\bar{1}$, $\overline{186}$, $\overline{120}$ et $\overline{67}$

EXERCICE 14

E est l'anneau $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$. \bar{n} est la classe de n

1) $f: E \rightarrow E: x \mapsto f(x) = \overline{17}x + \bar{9}$. L'inverse de 17 dans E est l'élément a tel que $\overline{17} \times a = \bar{1}$: on obtient $a = \bar{2}$ car $17 \times 2 \equiv 1[33]$

$$f(x) = \bar{0} \Leftrightarrow \overline{17}x + \bar{9} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{2} \times \overline{17} + \bar{2} \times \bar{9} = \bar{0} \Leftrightarrow x + \overline{18} = \bar{0} \Leftrightarrow x = \overline{15}$$

f est bijective ssi $\forall y \in E, \exists x \in E$ tel que $y = f(x) \Leftrightarrow y = \overline{17}x + \bar{9} \Leftrightarrow \overline{17}x = y + \overline{24} \Leftrightarrow x = 2y + \overline{15}$

Ce x étant unique pour y donné alors f est bijective : $f^{-1}(x) = \bar{2}x + \overline{15}$

2) $g: E \rightarrow E: x \mapsto g(x) = \overline{22}x + \bar{7}$ Nous remarquons que $22 = 11 \times 2$; puisque $\overline{11} \times \bar{3} = \bar{0}$ alors :

• Si $x = 3k$ est élément de E alors $g(x) = \overline{22} \times 3k + \bar{7} = \bar{7}$

• Si $x = 3k + 1$ alors $g(x) = \overline{22} \times (3k + \bar{1}) + \bar{7} = \overline{29}$

• Si $x = 3k + 2$ alors $g(x) = \overline{22} \times (3k + \bar{2}) + \bar{7} = \overline{18}$

En conclusion l'ensemble des images des éléments de E par g est $S = \{\bar{7}, \overline{18}, \overline{29}\}$

EXERCICE 15

Résoudre dans \mathbb{N} l'équation d'inconnu x :

$$3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^x + 5 \equiv 0[11]$$

$$3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^x + 5 = (3^{2x} - 1)(3^x - 5)$$

$$(3^{2x} - 1)(3^x - 5) \equiv 0[11] \Leftrightarrow 3^{2x} - 1 \equiv 0[11] \text{ ou } 3^x - 5 \equiv 0[11]$$

Les restes de la division par 11 des puissances de 3 sont : $3^{5k} \equiv 1[11]$

$$3^{5k+1} \equiv 3[11] ; 3^{5k+2} \equiv 9[11] ; 3^{5k+3} \equiv 5[11] ; 3^{5k+4} \equiv 4[11] \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$3^{2x} - 1 \equiv 0[11] \Leftrightarrow 3^{2x} \equiv 1[11] \Leftrightarrow 2x = 5k \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = 5\alpha$$

$$3^x - 5 \equiv 0[11] \Leftrightarrow 3^x \equiv 5[11] \Leftrightarrow x = 5k + 3. \text{ En conclusion les solutions dans } \mathbb{N} \text{ de l'équation}$$

$$3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^x + 5 \equiv 0[11] \text{ sont : } x = 5k \text{ ou } x = 5k + 3 \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

EXERCICE 16

1) Déterminer le PGCD des nombres 21590 et 9525

Après décomposition on obtient : $21590 = 2 \times 5 \times 17 \times 127$ et $9525 = 3 \times 5^2 \times 127$ d'où PGCD

$$(21590, 9525) = 5 \times 127 = 635$$

Remarque : l'algorithme d'Euclide nous donne :

	2	3	1	3
21590	9525	2540	1905	635
2540	1905	635	0	

Ce qui nous conduit à PGCD $(21590, 9525) = 635$

$$2) \quad 34x \equiv 2[15] \Leftrightarrow 17x \equiv 1[15] \Leftrightarrow 2x \equiv 1[15] \Leftrightarrow x \equiv 8[15] \Leftrightarrow x = 15k + 8 \quad k \in \mathbb{N}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $21590x + 9525y = 1270$

Cette équation est équivalente à : $34x + 15y = 2 \Leftrightarrow 34x = 2 - 15y \Leftrightarrow 34x \equiv 2[15] \Leftrightarrow x = 15k + 8$.

D'où l'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \{(15k + 8, -34k - 18), k \in \mathbb{Z}\}$

EXERCICE 17

$\dot{0}$ désigne la classe d'équivalence modulo 15 de l'entier a .

$$1) \quad \dot{a}\dot{b} = \dot{0} \text{ avec } \dot{a} \neq \dot{0} \text{ et } \dot{b} \neq \dot{0} \Leftrightarrow (\dot{a}, \dot{b}) \in \{(3k, 5k', 3k)\} \text{ avec } k \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ et } k' \in \{1, 2\}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0}$

$$x^2 - \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0} \Leftrightarrow (x - \dot{1})(x - \dot{5}) = \dot{0} \Rightarrow x = \dot{1} \text{ ou } x = \dot{5} \text{ ou } \begin{cases} x - 1 = 3k \\ x - 5 = 5k' \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - 1 = 5k' \\ x - 5 = 3k \end{cases}$$

$$x - 1 = 3k \text{ et } x - 5 = 5k' \Leftrightarrow 4 = 3k - 5k' \text{ on obtient } k = 3 \text{ et } k' = 1 \text{ ce qui nous donne } x = \dot{10}$$

$$x - 1 = 5k' \text{ et } x - 5 = 3k \Leftrightarrow 5k' - 3k = 4 \text{ on obtient } k = 3 \text{ ce qui nous donne } x = \dot{11}$$

En conclusion l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ $x^2 - \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0}$ est $S = \{\dot{1}, \dot{5}, \dot{10}, \dot{11}\}$

$$3) \quad \text{Résoudre dans } (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^2 \begin{cases} \dot{3}x + \dot{3}y = \dot{3} & (1) \\ \dot{2}x + y = \dot{5} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow y = \dot{5} - \dot{2}x : (1) \text{ devient alors } \dot{3}x + \dot{3}(\dot{5} - \dot{2}x) = \dot{3}x \Leftrightarrow -\dot{3}x = \dot{3} \Leftrightarrow \dot{3}x = -\dot{3} \Leftrightarrow \dot{3}x = \dot{12}$$

d'où $x = \dot{4}$ ou $x = \dot{9}$

Pour $x = \dot{4}$ on trouve $y = \dot{12}$; pour $x = \dot{9}$ on trouve $y = \dot{2}$

L'ensemble des solutions du système est $S = \{(\dot{4}, \dot{12}), (\dot{9}, \dot{2})\}$

EXERCICE 18

b est un entier naturel strictement supérieur à 1

$$1) \quad \text{Puisque } b^2 - 1 = (b+1)(b-1) \text{ alors } b^2 - (b+1)(b-1) = 1$$

En posant $u = 1$ et $-(b+1) = v$ alors $b^2(b-1)$ vérifient l'identité de Bézout, ils sont donc premiers entre eux.

2) $b^2x + (b-1)y = 1$. D'après 1) $(1, -(b+1))$ est une solution particulière de cette équation ;

l'ensemble des solutions dans \mathbb{Z}^2 est $S = \{(-k(b-1)+1, kb^2-(b+1)); k \in \mathbb{Z}\}$

3) $9x + 2y = 1$ est de la forme $b^2x + (b-1)y = 1$ avec $b = 3$ d'où l'ensemble de ses solutions est $S = \{(-2k+1, 9k-4)\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

EXERCICE 19

1) Déterminer les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $\begin{cases} a+b=168 \\ \text{PGCD}(a, b)=21 \end{cases}$

$\text{PGCD}(a, b) = 21 \Rightarrow \begin{cases} a = 21a' \\ b = 21b' \end{cases}$ où a' et b' sont deux entiers naturels premiers entre eux alors

$$a+b=168 \Leftrightarrow 21a'+21b'=168 \Leftrightarrow a'+b'=8$$

a'	1	2	3	4	5	6	7
b'	7	6	5	4	3	2	1

On obtient

$$* \begin{cases} a'=1 \\ b'=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=21 \\ b=147 \end{cases} \quad * \begin{cases} a'=7 \\ b'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=147 \\ b=21 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} a'=3 \\ b'=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=63 \\ b=105 \end{cases} \quad * \begin{cases} a'=5 \\ b'=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=105 \\ b=63 \end{cases}$$

Les couples d'entiers naturels (a, b) solutions sont donc $(21, 147)$; $(147, 21)$; $(63, 105)$; $(105, 63)$

2) Déterminons les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $\begin{cases} \text{PGCD}(a, b) = 27 \\ \text{PPCM}(a, b) = 108 \end{cases}$

On a : $\text{PGCD}(a, b) = 27 \Rightarrow \begin{cases} a = 27a' \\ b = 27b' \end{cases}$ avec $\text{PGCD}(a', b') = 1$

D'autre part ; $\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = ab \Leftrightarrow ab = 27 \times 108$

$$27a' \times 27b' = 27 \times 108 = 4$$

a'	1	2	4
b'	4	2	1

On obtient

$$* \begin{cases} a'=1 \\ b'=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=27 \\ b=108 \end{cases} \quad * \begin{cases} a'=4 \\ b'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=108 \\ b=27 \end{cases}$$

Les couples d'entiers naturels (a, b) solutions sont : $(27, 108)$; $(108, 27)$

3) Déterminons les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $\text{PGCD}(a, b) + \text{PPCM}(a, b) = b + 9$

Posons $\text{PGCD}(a, b) = d$ et $\text{PPCM}(a, b) = m$

Alors $a = da'$, $b = db'$, $m = da'b'$ avec $a' \wedge b' = 1$

Ainsi $d + m = b + 9 \Leftrightarrow d + da'b' - db' = 9 \Leftrightarrow d(1 + a'b' - b') = 9$ d est donc un diviseur de 9 :

$$d \in \{1, 3, 9\}$$

* Si $d = 1$ alors $a'b' - b' = 8 \Leftrightarrow b'(a' - 1) = 8 \Rightarrow b'$ est un diviseur de 8 $b' \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Remarquons que pour $d = 1$, $a = a'$ et $b = b'$ d'où on aura : $b = 1$ et $a = 9$; $b = 2$ et $a = 5$; $b = 4$ et $a = 3$

* Si $d = 3$ alors $a'b' - b' = 2 \Leftrightarrow b'(a' - 1) = 2$ On aura : $b' = 1$ et $a' = 3$

Ce qui nous donne $a = 9$ et $b = 3$

* Si $d = 9$ alors $a'b' - b' = 0 \Leftrightarrow b'(a' - 1) = 0 \Leftrightarrow a' = 1$ et $b' \in \mathbb{N}$

d'où $a = 9$ et $b = 9b'$. L'ensemble des solutions est

$$S = \{(9, 1), (5, 2), (3, 4), (9, 3), (9, 9b'), b' \in \mathbb{N}\}$$

EXERCICE 20

1) Déterminons les paires d'entiers naturels (a, b) qui vérifient

$$m - 16d = 1977 \text{ où } m = a \vee b, d = a \wedge b$$

Nous avons $a = da'$, $b = db'$, $m = da'b'$ avec $a' \wedge b' = 1$

$$m - 16d = 1977 \Leftrightarrow d(a'b' - 16) = 1977 : d \text{ est alors un diviseur de } 1977 \Rightarrow d \in \{1, 3, 659, 1977\}$$

• Si $d = 1$ alors $a'b' = 1993$: $a' = 1$ et $b' = 1993 \Rightarrow a = 1$ et $b = 1993$

• Si $d = 3$ alors $a'b' = 675 = 27 \times 25$: on aura $a' = 1$ et $b' = 675$

ce qui nous donne $a = 3$ et $b = 2025$ ou $b' = 25$

ce qui donne $a = 81$ et $b = 75$

• Si $d = 659$ alors $a'b' = 19 \Rightarrow a' = 1$ et $b' = 19$; cela nous donne $a = 659$ et $b = 12521$

• Si $d = 1977$ alors $a'b' = 17 \Rightarrow a' = 1$ et $b' = 17$, cela nous donne $a = 1977$ et $b = 33609$.

L'ensemble des paires (a, b) est donc

$$S = \{(1, 1993), (3, 2025), (81, 75), (659, 12521), (1977, 33609)\}$$

EXERCICE 21

1) D'après l'algorithme d'Euclide si $a = bq + r$ alors $a \wedge b = b \wedge r$ puisque $r = a - bq$ alors

$$a \wedge b = b \wedge (a - bq)$$

2) La division euclidienne de $5n^3 - 10n + 9$ et pour reste $r = -38$

$$d'où $(5n^3 - n) \wedge (n + 2) = (n + 2) \wedge (-38) = (n + 2) \wedge 38$$$

3) $5n^3 - n$ est divisible par $n + 2$ si $(5n^3 - n) \wedge (n + 2) = n + 2 \Leftrightarrow (n + 2) \wedge 38 = n + 2$. Pour cela $n + 2$ doit être un diviseur de 38

$$d'où : $n + 2 \in \{-38, -19, -2, -1, 1, 2, 19, 38\} \Leftrightarrow \{-40, -21, -4, -3, -1, 0, 17, 36\}$$$

3) Les valeurs possibles du PGCD de $(5n^3 - n)$ et $(n + 2)$ sont les diviseurs positifs de 38 qui sont :

$$1, 2, 19, \text{ et } 38 \quad (5n^3 - n) \wedge (n + 2) = 19 \text{ si } n + 2 \equiv 0[19] \text{ et } n + 2 \text{ est impair d'où}$$

$$n + 2 = 19(2k + 1) \Rightarrow n = 38k + 17 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

EXERCICE 22

1) Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (1): $5x - 4y = 2$ $(2, 2)$ est une solution particulière de l'équation (1). Les couples (x, y) solutions de l'équation (1) sont tels que

$$x = 4k + 2 \text{ et } y = 5k + 2, k \in \mathbb{Z} \quad S = \{(4k + 2, 5k + 2), k \in \mathbb{Z}\}$$

$$4) (a, b) \text{ est (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4k + 2 \\ b = 5k + 2 \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

a) On a :

$$a \wedge b = (5k+2) \wedge (5k+2) = (4k+2) \wedge (5k+2-4k-2) = (4k+2) \wedge k = k \wedge (4k+2-4k) = k \wedge 2$$

$$\Rightarrow a \wedge b = 2 \text{ ou } a \wedge b = 1$$

$$b) \begin{cases} a \vee b = 60 \\ a \wedge b = -2 \\ a = 4k+2 \\ b = 5k+2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

On sait que $ab = (a \vee b) \times (a \wedge b)$

$$(4k+2)(5k+2) = 60 \times 2$$

$$20k^2 + 18k - 116 = 0$$

$$\Delta' = 2401 = 49^2$$

$$k_1 = \frac{-9-49}{20} = \frac{-29}{10} \notin \mathbb{Z} ; \quad k_2 = \frac{-9+49}{20} = \frac{20}{10} = 2$$

alors $k = 2 \Rightarrow a = 10$ et $b = 12$

EXERCICE 23

1) Démontrons que :

Pour tout entier naturel n , $3^{2n+3} + 2^{n+3} \equiv 0 [7]$ on a $3^2 \equiv 2 [7]$

alors pour tout entier naturel n , $3^2 \equiv 2 [7]$

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} \equiv 2^n \times 3^3 + 2^n \times 2^3 [7]$$

par suite

$$3^{2n+3} + 2^{2n+3} \equiv 2^n \times 35 [7]$$

D'où $3^{2n+3} + 2^{2n+3} \equiv 0 [7]$

2) Soit à résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{6}\}$ l'équation $x^2 + 2x + 6 = \dot{0}$

$$\Delta' = \dot{1} - \dot{6} = -\dot{5} = \dot{2} = (\dot{3})^2$$

$$x' = -\dot{1} - \dot{3} = \dot{3} \quad x'' = -\dot{1} + \dot{3} = \dot{2}$$

d'où $S = \{\dot{2}, \dot{3}\}$

3) Soit à résoudre le système $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$ m'étant le PPCM des entiers a et b .

Soit d le PGCD des entiers a et b . On sait que $md = ab$ et $a = a'd$ et $b = b'd$ où a' et b' sont deux entiers naturels premiers entre eux $3m = ab \Leftrightarrow md = 3d$ alors $d = 3$ et $a = 3a'$, $b = 3b'$

$$a^2 - b^2 = 405 \Leftrightarrow 9(a'^2 - b'^2) = 405$$

$$a'^2 - b'^2 = 45 \Leftrightarrow (a' + b')(a' - b') = 45$$

les entiers a' , b' solutions sont $(a' = 23 \text{ et } b' = 22)$ ou $(a' = 7, b' = 2)$

D'où l'ensemble des couples (a, b) solutions est : $S = \{(69, 66)(21, 6)\}$

EXERCICE 24

$$1) 10^3 - 1 = 9 \times 111 ; 10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$$

n est un entier naturel quelconque

$$A = 10^{9n} + 2 \times 10^{6n} + 2 \times 10^{3n} + 1$$

$$A = (10^{3n} + 1)[10^{3n}(10^{3n} + 1) + 1]$$

On sait que $10^3 - 1 = 9 \times 111 \Rightarrow 10^3 \equiv 1(111)$

alors $10^{3n} \equiv 1(111)$ et $10^{3n} + 1 \equiv 2(111)$

par suite $A \equiv 2 \times 3(111) \Leftrightarrow A \equiv 6(111)$

2) On sait que $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$

alors $10^3 \equiv -1(7)$; $10^3 \equiv -1(11)$ et $10^3 \equiv -1(13)$

Pour tout entier impair n , on a : $10^{3n} \equiv -1(7)$; $10^{3n} \equiv -1(11)$ et $10^{3n} \equiv -1(13)$

$10^{3n} + 1 \equiv 0(7)$, $10^{3n} + 1 \equiv 0(11)$ et $10^{3n} + 1 \equiv 0(13)$

d'où $A \equiv 0(7)$, $A \equiv 0(11)$ et $A \equiv 0(13)$

5) a) Pour tout entier naturel paire n , $10^{3n} \equiv 1(7)$; $10^{3n} \equiv 1(11)$ et $10^{3n} \equiv 1(13)$

alors $10^{3n} + 1 \equiv 2(7)$, $10^{3n} + 1 \equiv 2(11)$ et $10^{3n} + 1 \equiv 2(13)$

d'où $A \equiv 6(7)$, $A \equiv 6(11)$ et $A \equiv 6(13)$

donc $A - 6$ est divisible par 7, par 11 et par 13.

EXERCICE 25

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division de 4^n par 7

$$4^0 \equiv 1(7) , 4^1 \equiv 4(7) , 4^2 \equiv 2(7) , 4^3 \equiv 1(7)$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $4^{3k} \equiv 1(7)$, $4^{3k+1} \equiv 4(7)$, $4^{3k+2} \equiv 2(7)$ donc pour tout entier naturel n ,

$$4^n \equiv r(7) \text{ avec } r \in \{1, 2, 4\}$$

2) Déterminons suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division de

$$A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2 \text{ par } 7$$

$$\left. \begin{array}{l} 851 \equiv 4(7) \Rightarrow 851^{3n} \equiv 4^{3n}(7) \\ 4^{3n} = (4^3)^n \equiv 1(7) \end{array} \right\} \Rightarrow 851^{3n} \equiv 1(7)$$

$$\left. \begin{array}{l} 851^{2n} \equiv 4^{2n}(7) \\ 4^{2n} = (4^2)^n \equiv 2^n(7) \end{array} \right\} \Rightarrow 851^{2n} \equiv 2^n(7)$$

$$851^n \equiv 4^n(7)$$

$$\text{Par suite } A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2 \equiv 1 + 2^n + 4^n + 2(7)$$

Pour $n=0$ $A \equiv 5(7)$, pour $n=1$ $A \equiv 2(7)$, pour $n=2$ $A \equiv 2(7)$, pour $n=3$ $A \equiv 5(7)$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n=3k \Rightarrow A \equiv 5(7)$, $n=3k+1 \Rightarrow A \equiv 2(7)$, $n=3k+2 \Rightarrow A \equiv 2(7)$

Donc $A \equiv r(7)$ avec $r \in \{2, 5\}$

$$3) B = \overline{2103211}^4 = 2 \times 46 + 4^5 + 3 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 4 + 1$$

$$B = 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 1(7)$$

donc $B \equiv 2(7)$

SUITES NUMERIQUES :

~ ENONCES ~

EXERCICE 1

Trouver trois nombres réels a, b, c positifs ($a \leq b \leq c$) constituant dans cet ordre les trois premiers termes d'une suite arithmétique et vérifiant simultanément les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} a + b + c = 12 \\ a^2, 3b, c^2 \text{ constituent dans cet ordre les trois premiers termes d'une suite géométrique} \end{cases}$$

(Comp. SET 1978)

EXERCICE 2

Soit la suite numérique U définie par $\begin{cases} U_1 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N}; 3U_{n+1} - 2U_n = 3 \end{cases}$

1) Calculer U_2, U_3 et U_4 .

2) On appelle V la suite définie dans \mathbb{N}^* par $v_n = U_n - 3$

Calculer V_1 et montrer que l'on a : $3V_{n+1} - 2V_n = 0$. Quelle est la nature de cette suite ? Exprimer V_n en fonction de n et calculer.

3) Exprimer U_n en fonction de n et trouver sa limite lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 3

On définit dans \mathbb{Z} une suite (U_n) en posant : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = 1 - 2U_n \end{cases}$

1) Montrer que pour tout n , U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.

2) Pour quels entiers positifs n , U_n est-il divisible par 3 ?

3) Trouver un rationnel α tel que $(U_n - \alpha)$ soit une suite géométrique de raison -2 . Déterminer alors U_n en fonction de n . En déduire que $\forall n > 0$, $5(-2)^n + 1$ est divisible par 3.

(Bac 85 SET)

EXERCICE 4

Soit la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \ln 2^n$

1) Calculer U_0, U_1, U_2 .

2) Donner la nature de la suite (U_n) et la somme des n premiers termes.

3) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = e^{U_n}$. Donner la nature de la suite (V_n) et calculer la somme des n premiers termes.

EXERCICE 5

Quatre entiers strictement positifs a, b, c, d , forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison est un entier outre $10a^2 = d - b$.

EXERCICE 6

Trouver les suites géométriques de premier terme et de raison non nuls telles que $4U_3 = 49U_5$

EXERCICE 7

Soit (U_n) une suite réelle dans laquelle les dix premiers termes de la suite sont en progression arithmétique de raison r et à partir de U_{10} les termes sont en progression géométrique de raison q . On donne $U_1 = 0$; $U_{16} = -\frac{1}{27}$ et $rq = 1$.

- 1) Calculer q , r , U_{10} et U_{11}
- 2) Calculer la somme S_n des n premiers termes de la suite dans les cas suivants :
 - a) $n \leq 10$;
 - b) $n > 10$
- 3) Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 8

Soit (U_n) une suite géométrique décroissante de raison q telle que : $U_1 U_2 U_3 = \frac{125}{8}$ et $\left(U_1 - \frac{5}{12}; U_2 U_3\right)$ soit en progression arithmétique.

Déterminer U_1 et q . Calculer pour tout entier n non nul la somme $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$. Quelle est la limite de S_n .

EXERCICE 9

Soit (U_n) une suite géométrique positive telle que : $4(U_1 + U_2 + U_3) = 7$; $U_3 + U_4 + U_5 = \frac{7}{16}$

- 1) Calculer le premier terme U_1 et la raison q de la suite (U_n) .
- 2) Calculer la somme S_n des n premiers termes de la suite.
- 3) Trouver le plus petit entier positif p tel que $|S_p - 2| < 10^{-6}$

EXERCICE 10

On considère la suite numérique U définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 1$.

On pose $V_n = 4U_n - 6n + 15$.

Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

Exprimer V_n en fonction de n , en déduire que pour tout entier n , $U_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$

Montrer que U_n peut s'écrire $t_n + W_n$ où (T_n) est une suite géométrique et (W_n) est une suite arithmétique

Calculer $T_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$ et $W_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$

En déduire $U = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

EXERCICE 11

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{1}{3}(n^2 + n)$

- 1) Calculer U_1 , U_2 et U_3 .
- 2) Calculer U_n et U_{n+1} en fonction de n .
- 3) En déduire que (U_n) est une suite arithmétique.

EXERCICE 12

Les cinq premiers termes U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 d'une progression géométrique sont strictement positifs. On note x la raison de cette suite et a le 3^e terme. Exprimer à l'aide de a et x les sommes $S = U_1 + U_5$ et

$s = U_2 + U_4$. Montrer que $s^2 = aS + 2a^2$. En déduire a et x pour que $s = 34$ et $S = \frac{257}{2}$

EXERCICE 13

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3$

- 1) Calculer les 5 premiers de cette suite.
- 2) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n < 6$.
- 3) Montrer que (U_n) est strictement croissante.
- 4) On considère dans un plan muni d'un repère orthonormal (o, \vec{i}, \vec{j}) la droite D_A d'équation $y = x$ et la Droite D_B d'équation $y = \frac{1}{2}x + 3$. Utiliser ces deux droites pour représenter sur l'axe des abscisses : U_1, U_2, U_3 et U_4 . Faire une conjecture sur la limite de (U_n) .
- 5) Soit la suite (V_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $V_n = U_n - 6$
- 6) Calculer les 5 premiers termes de cette suite.
- 7) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n < 6$.
- 8) Montrer que (U_n) est strictement croissante.
- 9) On considère dans un plan muni d'un repère orthonormal (o, i, j) la droite D_A d'équation $y = x$ et la Droite D_B d'équation $y = \frac{1}{2}x + 3$. Utiliser ces deux droites pour représenter sur l'axe des abscisses : U_1, U_2, U_3 et U_4 . Faire une conjecture sur la limite de (U_n) .
 - a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme V_0 et la raison q .
 - b) Quelle est la limite de (V_n) ? En déduire la limite de (U_n) .
 - c) Exprimer V_n à l'aide de n , puis U_n en fonction de n .

EXERCICE 14

Soient (a_n) et (b_n) les suites numériques définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 3$ et pour tout entier n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \end{cases}$$

- 1) Soit (U_n) la suite de terme général $U_n = a_n + b_n$.
 - a) Pour tout entier n , calculer U_{n+1} en fonction de U_n
 - b) Calculer U_n .
- 2) Soit (V_n) la suite de terme général $V_n = a_n - b_n$.
 - a) Pour tout entier n , calculer V_{n+1} en fonction de V_n .
 - b) En déduire V_n en fonction n . La suite (V_n) converge-t-elle ?

- c) Exprimer a_n et b_n en fonction n .
 d) Calculer les limites, si elles existent des suites (a_n) et (b_n) .

EXERCICE 15

- 1) n étant un entier naturel donné, résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\ln(7^n x) = 2n$.
 2) On considère la suite (V_n) définie par $\ln(7^n V_n) = 2n$
 a) Calculer V_0 .
 b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
 3) la suite (V_n) admet-elle une limite ?
 4) Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout entier n strictement supérieur à n_0 , on ait $V_n > 100$.

EXERCICE 16

- 1) Montrez que pour tout réel $x \in]-\infty, 3[$, on a : $\frac{9}{6-x} < 3$.
 2) Dédisez – en qu'il existe une suite U définie par $U_0 = -1$, $U_n = \frac{9}{6-U_n}$ pour tout n de \mathbb{N} .
 3) Déterminer le sens de variation de la suite U .
 4) Soit la suite v définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{1}{U_n - 3}$.

Montrez que la suite v est une suite arithmétique.

- 5) Dédisez – en U_n en fonction de n .
 6) Déterminez la limite de la suite U .

EXERCICE 17

Soit U la suite définie sur \mathbb{N}^* par

$$U_1 = 1 \text{ et } U_{n+1} = \sqrt{4U_n}$$

- 1) Calculez U_2, U_3, U_4, U_5 . Donnez les résultats sous la forme 2^a
 2) Soit la suite V définie sur \mathbb{N}^* par $V_n = \ln U_n - \ln 4$
 Montrez que V est une suite géométrique.
 3) Exprimez V_n puis U_n en fonction de n . Calculez $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
 4) Pour quelles valeurs de n a-t-on : $U_n > 3,96$?
 5) Calculez $S_n = \sum_{i=1}^n V_i$; étudiez la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 18

Soit θ un réel tel que : $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

la suite (U_n) définie par $U_0 = 2 \cos \theta$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de θ (on rappelle que, pour tout réel x , on a $(\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1)$)

- 2) Montrez par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $U_n = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$
- 3) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $V_n = \frac{\theta}{2^n}$. Déterminez la limite de la suite (V_n)
- 4) En déduire que (U_n) est convergente ; quelle est sa limite ?

EXERCICE 19

Soit (U) la suite définie sur \mathbb{N} par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4}$

- 1) Tracez la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{3x + 4}$
Représentez graphiquement les premiers termes de la suite
- 2) Montrez que pour tout entier naturel n , on a $U_n \leq 4$
- 3) Montrez que la suite U est strictement croissante
- 4) Montrez que pour tout entier naturel n , on a $4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$
- 5) Déduisez-en que la suite U converge. Quelle est sa limite
- 6) Etudiez la convergence de la suite V définie par :
 $V_n = n^2(4 - U_n)$ pour tout entier naturel n .

EXERCICE 20

On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par

$$U_0 = \frac{3}{4} \text{ et } U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n^2 + \frac{1}{2}U_n$$

- 1) Tracez la courbe $C: y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ et la droite $\Delta: y = x$ dans un même repère orthonormal.

Déduisez-en la construction des points $M_n(U_n, U_{n+1})$ pour n variant de 0 à 3. Que vous suggère cette étude graphique de la suite ?

- 2) Montrez que, pour tout entier naturel n , on a : $0 < U_n < 1$
- 3) Montrez que la suite (U_n) est décroissante.
- 4) Montrez que pour tout entier naturel n , on a : $U_{n+1} \leq \frac{7}{8}U_n$
- 5) Déduisez-en que (U_n) converge vers 0

EXERCICE 21

Soit U et V les suites définies sur \mathbb{N} par

$$U_2 = 2 \text{ et } U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 5}{2U_n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{U_n - \sqrt{5}}{U_n + \sqrt{5}}$$

- 1) Montrez que, pour tout entier naturel n , on a $V_{n+1} = V_n^2$

Déduisez-en la relation : $V_n = V_0^{(2^n)}$ pour tout n de \mathbb{N}

- 2) Montrez que l'on a : $V_0 = \frac{-1}{(2 + \sqrt{5})^2}$

Déduisez-en : $|V_0| < \frac{1}{16}$. Déterminez alors la limite de la suite V puis celle de U .

EXERCICE 22

Soit (D) une droite, B et C deux points distincts de (D). On munit (D) du repère $\left(B, \overrightarrow{BC}\right)$.

On désigne par A_0 le barycentre de $\left(B; \frac{1}{3}\right), \left(C; \frac{2}{3}\right)$, A_1 barycentre de $\left(A_0, \frac{1}{3}\right), \left(B, \frac{2}{3}\right)$, A_2 celui de $\left(A_1, \frac{1}{3}\right), \left(A_0, \frac{2}{3}\right)$ pour tout $n \geq 2$, A_n celui de $\left(A_{n-1}, \frac{1}{3}\right), \left(A_{n-2}, \frac{2}{3}\right)$

On note X_n l'abscisse de A_n

1) calculez X_0, X_1, X_2 ,

2) a) Montrez que, pour tout $n \geq 2$, on a la relation $X_n = \frac{1}{3}(X_{n-1} - X_{n-2}) + X_{n-2}$

b) Déduisez-en : $X_n + X_{n-1} = \frac{1}{3}(X_{n-1} - X_0) + X_0 + X_1$ puis calculez X_n en fonction de X_{n-1}

c) Montrez que la suite définie par $V_n = X_n - \frac{2}{5}$ est une suite géométrique. Calculez alors X_n et V_n

3) Quelle est la position limite des points A_n lorsque n tend vers l'infini ?

EXERCICE 23

Soit la suite (U_n) $n \in \mathbb{N}^*$ définie par $U_1 = -1$ et $U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$

1) Démontrer par récurrence que U_n est majoré par 3

2) Etudier le sens de variation de la suite (U_n)

3) On considère la suite (V_n) définie sur \mathbb{N}^* par $V_n = n(3 - U_n)$

a) Démontrer que cette suite est géométrique. Préciser sa raison et calculer V_1

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

EXERCICE 24

Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{e^{U_n}}{U_n + 2}$

1) Soit f l'application de l'intervalle $[0,1]$ dans \mathbb{R} définie par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$

a) Déterminer les fonction dérivées f' et f'' .

b) Démontrer que, pour tout réel x de $[0,1]$ on a $\frac{1}{4} \leq f'(x) < \frac{2}{3}$

c) Etudier f . Quelle est l'image du segment $[0,1]$ par f ?

2) a) Etudier le sens de variation de la fonction

$$g: x \mapsto f(x) - x \text{ sur } [0,1]$$

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique l dans $[0,1]$

3) a) Tracez dans un repère orthonormé, la courbe représentative C de f .

b) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite

- 4) a) Montrez que pour tout entier naturel n , on a $U_n \in [0,1]$
- b) Utiliser le 1 b) pour démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq \frac{U_{n+1} - 1}{U_n - 1} \leq \frac{2}{3}$
- c) En déduire que la suite U converge vers 1.
- d) Déterminer un entier n_0 tel que, si l'on a : $n \geq n_0$, alors on a $|U_{n-1} - 1| \leq 10^{-3}$

EXERCICE 25

Soit f la fonction numérique de la variable si elle définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$. On désigne par (C) et la courbe représentative de f dans un plan P rapporté au repère orthonormal (o, \vec{i}, \vec{j}) .

L'objet principal du problème est de montrer que la courbe (C) et droite (Δ) d'équation $y = x$ se coupent en un seul point dont on déterminera une approximation de son abscisse α

- 1) Etudier les variation de f , en précisant sa limite en $+\infty$. Construire la courbe C ; on fera figurer la tangente au point d'abscisse 0 et la droite (Δ) d'équation $y = x$

- 2) a) Montrez que la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante
- b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution $\alpha \geq 0$ et une seule et que l'on a :

$$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$$

- 3) a) Utiliser le tableau de variation de f pour montrer que $f(x)$ appartient à $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

- b) Montrer que l'on a : $0 \leq u(1-u) \leq \frac{1}{4}$ pour tout u tel que $0 \leq u \leq 1$

En déduire que l'on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout x élément de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (on pourra poser $e^{-x} = 4$)

- 4) Soit (U_n) la suite telle que $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

- a) Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour montrer que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |U_0 - \alpha|$

- b) En déduire que quel que soit l'entier naturel n , on a $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

Quelle est la limite de la suite (U_n) ?

- c) Trouver le plus petite entier k tel que $\frac{1}{2^{k+1}} \leq 10^{-3}$. Calculer U_k à l'aide de la calculatrice.

En déduire une valeur décimale approchée de α à 10^{-3} près

NB : Pour les solutions des exercices 24 et 25 voir tome 2

EXERCICE 26

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x} \, dx$$

- 1) Calculer I_0 , calculer I_1 en intégrant par parties

- 2) Comparer x^n et x^{n+1} lorsque $0 \leq x \leq 1$. En déduire que la suite (I_n) est une suite décroissante.

- 3) En procédant par encadrement, établir que : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$
- 4) Démontrer que pour tout x élément de $[0,1]$, on a : $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+x} \leq \frac{1}{2}(1-x)$

en déduire que : $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

Déterminer la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$

EXERCICE 27

- 1) On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme $U_0 = -1$ et la relation de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left(U_{n+1} = \frac{U_n + 8}{2U_{n+1}} \right)$$

Calculer U_1, U_2, U_3

- 2) Soit la fonction h définie sur $\left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$ par $h(x) = \frac{x+8}{2x+1}$ et (H) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (o, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 1cm

- Tracez dans ce repère (H) et la droite d'équation $y = x$
- Construire à l'aide de (H) et de (Δ) les points de l'axe (o, \vec{i}) d'abscisses respectives U_0, U_1, U_2, U_3 .
- Que peut-on prévoir quant à la convergence de la suite de la suite (U_n) ?

- 3) Soit $F(x) = \int_0^x e^{3t} \sin 2t \, dt$

Prouver en effectuant deux intégrations par parties successives que $F(x) = G(x) - \frac{4}{9}F(x)$ où G est une fonction que l'on déterminera. Indiquer une vérification.

(D'après Bacc MTE 1998)

~ SOLUTIONS ~

EXERCICE 1

Puisque a, b, c sont dans cet ordre en progression arithmétique alors la traduction des hypothèses nous donne

$$\begin{cases} 2b = a + c \\ a + b + c = 12 \\ (3b)^2 = a^2 \times c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b = 12 \\ a + c = 2b \\ 9b^2 = (ac)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a + c = 8 \\ c = 6 \end{cases}$$

EXERCICE 2

$$\begin{cases} U_1 = 6 \\ 3U_{n+1} - 2U_n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{3} \end{cases}$$

$$1) U_1 = \frac{2U_0 + 3}{3} = 5 ; U_2 = \frac{2U_1 + 3}{3} = \frac{13}{3} ; U_3 = \frac{2U_2 + 3}{3} = \frac{35}{9}$$

$$2) V_n = U_n - 3 : V_1 = U_1 - 3 \Leftrightarrow V_1 = 3$$

$$3V_{n+1} - 2V_n = 3(U_{n+1} - 3) - 2(U_n - 3) = 3U_{n+1} - 2U_n - 3 = 0 \text{ car on sait que } 3U_{n+1} - 2U_n = 3.$$

On en déduit que $V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n$. Ce qui montre que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$

$$V_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} V_1 \Leftrightarrow V_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \text{ car } |q| < 1$$

$$3) \text{ Nous savons que } V_n = U_n - 3 \text{ donc } U_n = V_n + 3 \text{ ce qui implique que } U_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$$

EXERCICE 3

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 1 - 2U_n \end{cases}$$

1) De la relation $U_{n+1} = 1 - 2U_n$ on déduit $U_{n+1} + 2U_n = 1$ d'où U_{n+1} et U_n vérifient l'identité de Bezout, ils sont par conséquent premiers entre eux.

$$2) \text{ On a : } U_1 = -3 ; U_2 = 7 ; U_3 = -13 ; U_4 = 27$$

Nous remarquons que U_1 et U_4 sont divisible par 3.

Nous concluons donc que si $n = 3k + 1$ alors U_n est divisible par 3. Démontrons cette propriété par récurrence. Supposons la relation vraie à l'ordre $n = 3k + 1$ et montrons qu'elle est vraie au rang suivant ie $n' = 3(k + 1) + 1 : U_{3k+1}$ divisible par 3 : U_{3k+4} est - il alors divisible par 3 ?

$$U_{3k+2} = 1 - 2U_{3k+1} ; U_{3k+3} = 1 - 2U_{3k+2}$$

$$U_{3k+3} = 1 - 2(1 - 2U_{3k+1}) = -1 + 4U_{3k+1}$$

$$U_{3k+4} = 1 - 2U_{3k+3} = 1 - 2(-1 + 4U_{3k+1}) = 3 + 8U_{3k+1}$$

$U_{3k+4} = 3 + 8U_{3k+1}$. Puisque U_{3k+1} divisible par 3 alors U_{3k+4} aussi l'est. Ce qui établit la propriété. En conclusion U_n est divisible par 3 si $n = 3k + 1$ avec k un entier naturel.

3) $(U_n - \alpha)$ est une suite géométrique de raison -2 si $(U_{n+1} - \alpha) = -2(U_n - \alpha)$

$1 - 2U_n - \alpha = -2U_n + 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$ d'où la suite $(U_n - \frac{1}{3})$ est une suite géométrique de $q = -2$:

$$(U_n - \frac{1}{3}) = (-2)^n (U_0 - \frac{1}{3}) \quad U_n = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}(-2)^n$$

De $U_n = \frac{5(-2)^n + 1}{3}$ on obtient $5(-2)^n + 1 = 3U_n$. Puisque (U_n) est une suite de \mathbb{Z} ie U_n est un entier alors $5(-2)^n + 1$ est un multiple de 3 d'où est divisible par 3.

EXERCICE 4

$$U_n = \ln 2^n$$

1) $U_0 = \ln 2^0 = \ln 1 = 0$; $U_1 = \ln 2$; $U_2 = \ln 2^2 = 2 \ln 2$

2) $U_{n+1} = \ln 2^{n+1} = \ln(2 \times 2^n) = \ln 2 + \ln 2^n = \ln 2 + U_n \Rightarrow (U_n)$ est une suite arithmétique de raison $r = \ln 2$

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} = \frac{n}{2}(2U_0 + (n-1)r) = \frac{n(n-1)\ln 2}{2}$$

3) $V_n = e^{U_n} = e^{\ln 2^n} \Leftrightarrow V_n = 2^n$. La suite (V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_0 = 1$ et de raison $q = 2$

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1} = \frac{V_0(1 - q^n)}{1 - q} \Leftrightarrow S_n = 2^n - 1$$

EXERCICE 5

a, b, c et d quatre entiers positifs en progression géométrique : q la raison : $a \wedge b = 1$

on a : $b = qa$; $d = q^3a : 10a^2 = d - b \Leftrightarrow 10a^2 = q^3a - qa \Leftrightarrow 10a = q(q^2 - 1)$

Puisque a et b sont premiers entre eux alors d'après Gauss : q divise 10. D'où $q \in \{1, 2, 5, 10\}$

On trouve $q = 5 \rightarrow a = 12$; $b = 60$; $c = 300$; $d = 1500$.

$q = 10 \rightarrow a = 99$; $b = 90$; $c = 9900$; $d = 99000$.

EXERCICE 6

Soit U_0 le premier terme et q la raison

$$4U_3 = 49U_5 \Leftrightarrow 4U_0 \times q^3 = 49U_0q^5 \Leftrightarrow 4 = 49q^2 \Leftrightarrow q^2 = \frac{4}{49} \Rightarrow q = \frac{2}{7} \text{ ou } q = -\frac{2}{7}$$

Nous avons donc deux suites géométriques de raison $q = \frac{2}{7}$ et $q = -\frac{2}{7}$ de premier terme U_0 .

EXERCICE 7

1) U_1, U_2, \dots, U_{10} en progression arithmétique de raison r implique $U_{10} = U_1 + 9r = 9r$

$U_{10}, U_{11}, \dots, U_n$ en progression géométrique de raison q implique $U_{16} = q^6 U_{10}$ d'où

$$-\frac{1}{27} = q^6 \times 9r \Leftrightarrow -\frac{1}{27} = 9q^5 \text{ car } qr = 1 \text{ d'où } q^5 = \frac{-1}{27 \times 9} \Leftrightarrow U_1 = \frac{1}{3} \text{ et } r = -3, \text{ on a}$$

$$U_{10} = -27$$

$$U_{11} = 9$$

$$2) \ a) \text{ Si } n \leq 10 \text{ alors } S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n) \Leftrightarrow S_n = \frac{-3n(n-1)}{2}$$

$$b) \text{ Si } n > 10 \text{ alors } S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_{10} + U_{11} + \dots + U_n = \frac{-3 \times 10 \times 9}{2} + \frac{U_{11}(1 - q^{n-10})}{1 - q} \Leftrightarrow$$

$$S_n = -135 + \frac{27}{4} \left[1 - \frac{(-1)^{n-10}}{3} \right]$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-135 + \frac{17}{4} \left[1 + \frac{(-1)^{n-10}}{3} \right] \right) = \frac{-513}{4}$$

EXERCICE 8

(U_n) est une suite géométrique décroissante implique $0 < q < 1$ $U_1 \times U_2 \times U_3 = \frac{125}{8} \Leftrightarrow U_2^3 = \frac{125}{8}$

$$U_2 = \frac{5}{2} = qU_1$$

$U_1 = \frac{-5}{12}, U_2, U_3$ en progression arithmétique implique $2U_2 = U_1 - \frac{5}{12} + U_3 \Leftrightarrow 5 = U_1 - \frac{5}{12} + q \cdot U_1$

$$\Leftrightarrow 5 = U_1 - \frac{5}{12} + \frac{5q}{2}$$

$$12U_1 + 30q = 65. \text{ D'où le système } \begin{cases} 12U_1 + 30q = 65 \\ U_1 = \frac{5}{2q} \end{cases}$$

$6q^2 - 13q + 6 = 0 \rightarrow q = \frac{2}{3}$ ou $q = \frac{3}{2}$. Puisque $0 < q < 1$ alors la raison de la suite est $q = \frac{2}{3}$; par suite

$$U_1 = \frac{15}{4}$$

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = \frac{U_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{45}{4} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{45}{4}$$

EXERCICE 9

Soit q la raison de la suite, $q > 0$ car la suite (U_n) est positive.

$$1) \begin{cases} 4(U_1 + U_2 + U_3) = 7 \\ U_3 + U_4 + U_5 = \frac{7}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1(1+q+q^2) = \frac{7}{4} \\ U_3(1+q+q^2) = \frac{7}{16} \end{cases} \quad \text{En divisant membre à membre deux équations}$$

nous obtenons $\frac{U_3}{U_1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow U_3 = \frac{1}{4} d'où q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$$U_1(1+q+q^2) = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{4}U_1 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow U_1 = 1$$

$$2) S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{-1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \Leftrightarrow S_n = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$3) |S_p - 2| < 10^{-6} \Leftrightarrow \left|2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^p - 2\right| < 10^{-6} \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^p < 10^{-6} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} < 10^{-6} \Leftrightarrow 2^{p-1} > 10^6$$

Sachant que $2^{20} = 1,048576$ alors. D'où $|S_{21} - 2| < 10^{-6}$

EXERCICE 10

$$U_0 = 1 ; U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 1 ; V_n = 4U_n - 6n + 15$$

$$1) V_{n+1} = 4U_{n+1} - 6n + 9 = \frac{4}{3}U_n + 4n - 4 - 6n + 9$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3}(4U_n - 6n + 15) \Leftrightarrow V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n d'où (V_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = \frac{1}{3}$$

$$V_0 = 4U_0 + 15 = 19.$$

$$2) V_n = 19\left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ et } U_n = \frac{1}{4}\left(19\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6n - 15\right) \Leftrightarrow U_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$$

$$3) \text{ En désignant par } (tn) \text{ la suite de terme général } tn = \frac{19}{4} \times \frac{(1)^n}{3} \text{ et } (Wn) \text{ celle de terme général}$$

$$Wn = \frac{-15}{4} + \frac{3n}{2} \text{ on obtient une suite géométrique } (tn) \text{ de raison } q = \frac{1}{3} \text{ et } to = \frac{19}{4} \text{ et une suite}$$

$$\text{arithmétique } Wn \text{ de raison } r = \frac{3}{2} \quad Wo = \frac{-15}{4}. \text{ Telles que } Un = tn + Wn \text{ on en déduit}$$

$$Un = U_0 + U_1 + \dots + U_n = Tn + Wn$$

$$U_n = \frac{57}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{3(n+1)(n-5)}{4}$$

EXERCICE 11

$$(U_n) \text{ est définie par } U_0 = 0 \text{ et } U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{1}{3}(n^n + n)$$

$$1) U_0 + U_1 = \frac{2}{3} \quad U_1 = \frac{2}{3} ; U_0 + U_1 + \dots + U_2 = \frac{6}{3} = 2 \Leftrightarrow U_2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$U_0 + U_1 + U_2 + U_3 = 4 \Leftrightarrow U_3 = 2$$

$$2) \text{ Nous avons } U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{1}{2}(n^2 + n) \text{ pour tout entier } n$$

$$\text{donc } U_0 + U_1 + \dots + U_n - 1 = \frac{1}{3}[(n-1)^3 + (n-1)] \text{ par conséquent}$$

$$U_n = \frac{1}{3}(n^2 + n) - \frac{1}{3}(n^2 + 2n + 1 + n + 1) = \frac{2}{3}n$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{3}(n^2 + 2n + 1 + n + 1) - \frac{1}{3}(n^2 + n) = \frac{2}{3}(n+1)$$

$$3) \text{ Nus remarquons que } U_{n+1} = U_n + \frac{2}{3} \text{ d'où } (U_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r = \frac{2}{3}$$

EXERCICE 12

$$x \text{ est raison de la suite et a le troisième terme d'où } U_1 = \frac{a}{x^2}; U_2 = \frac{a}{x}; U_4 = ax, \text{ et } U_5 = ax^2$$

$$S = U_1 + U_5 = \frac{a}{x^2} + ax^2 = a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right); S = U_2 + U_4 = a\left(\frac{1}{x} + x\right)$$

$$s^2 = a^2\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) = a^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2a^2 \Leftrightarrow s^2 = aS + 2a^2$$

$$s = 34 \text{ et } S = \frac{257}{2} \Rightarrow 34^2 = \frac{257}{2}a + 2a^2 \Leftrightarrow 4a + 257a - 2312 = 0 = (321)^2 : \text{ on obtient } a = 8 \text{ puisque}$$

$$s = a\left(\frac{1}{x} + x\right) \text{ alors } 34 = 8\left(\frac{1}{x} + x\right) \Leftrightarrow 4x^2 - 17x + 4 = 0 : \Delta = 225 - 15^2 : \text{ on trouve } x = 4 \text{ ou } x = \frac{1}{4}$$

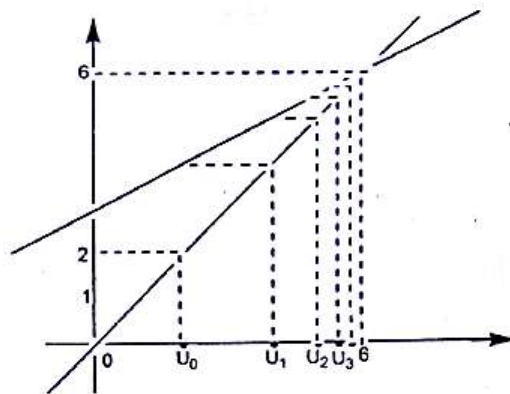
EXERCICE 13

$$U_0 = 2 ; U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3$$

$$1) U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 3 = 4; U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 3 = 5; U_3 = \frac{1}{2}U_2 + 3 = \frac{11}{2}; U_4 = \frac{1}{2}U_3 + 3 = \frac{23}{4}$$

$$2) \text{ Nous savons que les termes } U_0, U_1 \text{ jusqu'à } U_4 \text{ sont inférieure à 6. Supposons que } U_n < 6 \text{ et montrons alors } U_{n+1} < 6. U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3: U_n < 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}U_n < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}U_n + 3 < 6 \text{ ce qui montre } U_{n+1} < 6 \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N}; U_n < 6$$

$$3) U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n + 3 - U_n = 3 - \frac{1}{2}U_n. \text{ Puisque } U_n < 6 \text{ alors } 3 - \frac{1}{2}U_n = \frac{6 - U_n}{2} \geq 0 \text{ d'où } U_{n+1} - U_n \geq 0. \text{ La suite } (U_n) \text{ est alors croissante}$$



D'après cette représentation nous remarquons que la suite (U_n) converge vers 6.

5) (V_n) telle que $V_n = U_n - 6$

a) $V_{n+1} = U_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}U_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}(U_n - 6) = \frac{1}{2}V_n$ d'où (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

$$V_0 = U_0 - 6 = -4$$

b) (V_n) a pour limite zéro car sa raison est comprise 0 et 1.

$$c) V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times V_0 \Leftrightarrow V_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n ; U_n = V_n + 6 \Leftrightarrow U_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$$

EXERCICE 14

$$a_0 = 2 \text{ et } b_0 = 3. \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \end{cases}$$

$$1) U_n = a_n + b_n$$

$$a) U_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{5}[3a_n + 2b_n + 2a_n + 3b_n] = a_n + b_n = U_n$$

b) D'après a) $U_{n+1} = U_n$ donc (U_n) est une suite stationnaire par conséquent $U_n = U_0 = a_0 + b_0 = 5$

$$2) a) V_n = a_n - b_n : V_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n - 2a_n - 3b_n)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n - b_n) = \frac{1}{5}V_n$$

b) $V_{n+1} = \frac{1}{5}V_n$ implique (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme

$$V_0 = a_0 - b_0 = -1 \text{ d'où } V_n = -\left(\frac{1}{5}\right)^n. \text{ La suite } (V_n) \text{ converge vers zéro.}$$

c) Nous savons que $U_n = a_n + b_n = 5$ et $V_n = a_n - b_n = -\left(\frac{1}{5}\right)^n$ d'où

$$\begin{cases} a_n + b_n = 5 \\ a_n - b_n = -\left(\frac{1}{5}\right)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{5 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{2} \\ b_n = \frac{5 + \left(\frac{1}{5}\right)^n}{2} \end{cases}$$

d) $\lim a_n = \lim b_n = \frac{5}{2}$. D'où les suites (a_n) et (b_n) convergent vers $\frac{5}{2}$.

EXERCICE 15

$$1) \ln(7^n x) = 2n \Leftrightarrow 7^n \cdot x = e^{2n} \Leftrightarrow x = \frac{e^{2n}}{7^n} \Leftrightarrow x = \left(\frac{e^2}{7}\right)^n$$

$$2) \ln(7^n \cdot V_n) = 2n \Leftrightarrow V_n = \left(\frac{e^2}{7}\right)^n$$

$$a) V_0 = \left(\frac{e^2}{7}\right)^0 = 1$$

b) D'après l'expression de V_n , on déduit qu'elle est une suite géométrique de raison $q = \frac{e^2}{7}$

$$3) q = \frac{e^2}{7} > 1 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$$

$$4) V_n > 100 \Leftrightarrow \left(\frac{e^2}{7}\right)^n > 100 \text{ on trouve } n > 85,14 \text{ d'où } n_0 = 86$$

EXERCICE 16

$$1) \text{ Montrons que tout réel } x \in]-\infty, 3[\text{ on a } \frac{9}{6-x} < 3$$

$$\forall x \in]-\infty, 3[\quad x < 3 \Leftrightarrow 6-x > 3 \Leftrightarrow \frac{1}{6-x} < \frac{1}{3} \text{ par la suite } \frac{9}{6-x} < 3$$

$$2) \text{ La suite } U \text{ définie par } U_0 = -1, U_{n+1} = \frac{9}{6-U_n} \text{ existe si pour tout } n \in \mathbb{N} \quad U_n \neq 6$$

$$\text{On a } U_0 = -1 \Rightarrow U_0 \in]-\infty, 3[$$

$$\text{Supposons que pour tout } n \in \mathbb{N} \quad U_n \in]-\infty, 3[$$

$$\text{d'après le (1)} \quad \frac{9}{6-x} < 3 \Rightarrow U_{n+1} < 3$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n < 3 \Rightarrow U_n \neq 6$$

$$3) \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} - U_n = \frac{9}{6-U_n} - U_n = \frac{U_n^2 - 6U_n + 9}{6-U_n} = \frac{(U_n - 3)^2}{6-U_n} > 0 \text{ car } U_n < 3 \text{ donc la suite } U \text{ est strictement croissante}$$

$$4) \text{ Montrons que la suite } v \text{ définie sur } \mathbb{N} \text{ par } v_n = \frac{1}{U_n - 3} \text{ est une suite arithmétique.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{1}{\frac{9}{6-U_n} - 3} = \frac{6-U_n}{-9+3U_n} = \frac{U_n-6}{3U_n-9}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{U_n-6}{3-U_n} - \frac{1}{U_n-3} = \frac{-(U_n-3)}{3(U_n-3)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{donc la suite } v \text{ est une arithmétique de raison } r = -\frac{1}{3}.$$

$$5) \text{ Puisque } v \text{ est une suite arithmétique de raison } 3, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 + nr$$

$$v_0 = \frac{1}{U_0-3} = -\frac{1}{4}, \quad v_n = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3}n = \frac{-4n-3}{12}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{U_n-3} \Rightarrow U_n-3 = \frac{1}{v_n} \Rightarrow U_n = \frac{1}{v_n} + 3 = \frac{1+3v_n}{v_n} \quad \text{d'où } U_n = \frac{12n-3}{4n+3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12n}{4n} = 3$$

EXERCICE 17

U est la suite définie sur \mathbb{N}^* par $U_1 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{4U_n}$

1) Calcule de U_2, U_3, U_4, U_5 :

$$U_2 = \sqrt{4U_1} = \sqrt{4} = 2 ; U_3 = \sqrt{4U_2} = \sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}} ; U_4 = \sqrt{4U_3} = \sqrt{4 \times 2^{\frac{3}{2}}} = 2^{\frac{5}{2}} ;$$

$$U_5 = \sqrt{4U_4} = \sqrt{4 \times 2^{\frac{5}{2}}} = 2^{\frac{7}{2}}$$

2) Montrons que la suite (V) définie sur \mathbb{N}^* par $v_n = \ln U_n - \ln 4$ est une suite géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_{n+1} = \ln U_{n+1} - \ln 4 = \ln \sqrt{4U_n} - \ln 4$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \ln U_n - \ln 4 = \frac{1}{2} \ln U_n - \frac{1}{2} \ln 4$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} (\ln U_n - \ln 4)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n \text{ donc la suite } V \text{ est une suite géométrique de raison } q = \frac{1}{2}.$$

3) On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad V_n = V_1 q^{n-1}$

$$V_1 = \ln U_1 - \ln 4 = -\ln 4$$

$$\text{d'où } V_n = -\ln 4 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{Puisque } V_n = \ln U_n - \ln 4 = \ln \frac{U_n}{4} \text{ alors } \frac{U_n}{4} = e^{V_n} \Rightarrow U_n = 4e^{V_n}$$

$$U_n = 4e^{-\ln 4 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}}$$

$$\left| \frac{1}{2} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 4e^0 = 4$$

$$4) U_n > 3,96 \Rightarrow 4e^{V_n} > 3,96 \Rightarrow e^{V_n} > 0,99$$

$$V_n > \ln(0,99) \Leftrightarrow V_n > -0,01$$

$$-\ln 4 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} > -0,01$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} < \frac{0,01}{\ln 4}$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} < 0,0072 \Rightarrow (n-1) \ln \frac{1}{2} < \ln(0,0072) \text{ d'où } n-1 > \frac{\ln(0,0072)}{-\ln 2} \Rightarrow n-1 > 7,11 \Rightarrow n > 8,11$$

donc $U_n > 3,96$ pour $n > 8,11$

$$5) \sum_{i=1}^n V_i = V_1 \frac{1-q^n}{1-q} = -\ln 4 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) = -2 \ln 4 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n V_i = -2 \ln 4$$

EXERCICE 18

U est la suite définie sur \mathbb{N} par $U_0 = 2 \cos \theta$ où $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

1) Calcul des trois premiers termes :

$$U_0 = 2 \cos \theta$$

$$U_1 = \sqrt{2 + U_0} = \sqrt{2 + 2 \cos \theta} = \sqrt{2(1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1)} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$U_2 = \sqrt{2 + U_1} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\theta}{2}} = \sqrt{2(1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{4} - 1)} = 2 \cos \frac{\theta}{4}$$

2) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2 \cos(\frac{\theta}{2^n})$

$$U_0 = 2 \cos \theta = 2 \cos \frac{\theta}{2^0}; \quad U_1 = 2 \cos \frac{\theta}{2}; \quad U_2 = 2 \cos \frac{\theta}{4} = 2 \cos \frac{\theta}{2^2} \text{ supposons que pour tout } n \geq 2,$$

$$U_n = 2 \cos \frac{\theta}{2^n} \text{ et montrons que } U_{n+1} = 2 \cos \frac{\theta}{2^{n+1}}$$

$$\text{On a : } U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\theta}{2^n}} = \sqrt{2 + 2(2 \cos^2 \frac{\theta}{2^{n+1}} - 1)} = 2 \cos \frac{\theta}{2^{n+1}} \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = 2 \cos \frac{\theta}{2^n}$$

$$3) \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = \frac{\theta}{2^n}$$

$$0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

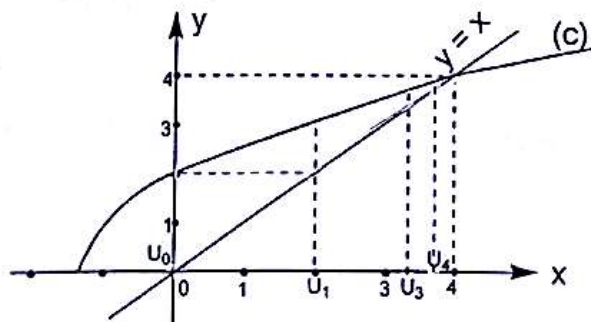
$$4) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = 2 \cos \frac{\theta}{2^n} = 2 \cos v_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cos v_n = 2 \cos 0 = 2 \text{ donc la suite } (U) \text{ converge vers } 2$$

EXERCICE 19

U est la suite définie par $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4}$

1) Traçons la courbe \mathcal{C} de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{3x+4}$ et représentons graphiquement les trois premiers termes de la suite u telle que $\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$



2) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \leq 4$

$$U_0 = 0 \Rightarrow 0 \leq U_0 \leq 4 \text{ supposons que } \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq 4 \text{ et montrons alors que } 0 \leq U_{n+1} \leq 4$$

$$0 \leq U_n \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 3U_n \leq 12 \Rightarrow 4 \leq 3U_n + 4 \leq 16 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{3U_n + 4} \leq 4 \Rightarrow 2 \leq U_{n+1} \leq 4$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \leq 4$$

3) Montrons que la suite (U) est strictement croissante $\forall n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{3U_n + 4} - U_n = \frac{3U_n + 4 - U_n^2}{\sqrt{3U_n + 4} + U_n}$$

$U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n + 1)(U_n - 4)}{\sqrt{3U_n + 4} + U_n} \geq 0$ car $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 \leq U_n \leq 4$ donc la suite (U) est strictement croissante.

4) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} \ 4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$

$$\text{On a : } \left. \begin{array}{l} 4 - U_1 = 2 \\ \frac{1}{2}(4 - U_0) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 - U_1 \leq \frac{1}{2}(4 - U_0)$$

$$U_1 = 2 \text{ et } \forall x \in [2, 4] f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$

$$\forall x \in [2, 4] \quad 3 \leq \sqrt{3x+4} \leq 4 \Rightarrow 6 \leq 2\sqrt{3x+4} \leq 8 \Rightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2\sqrt{3x+4}} \leq \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{3}{8} \leq \frac{3}{2\sqrt{3x+4}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \text{ pour tout } x \in [2, 4]$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous réels a et b de l'intervalle $[2, 4]$ on a

$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|$ en posant $b = 4$ et $a = U_n$ avec $n \geq 1$ car $U_1 = 2$ et la suite (U_n) est croissante

on a : $|f(4) - f(U_n)| \leq \frac{1}{2}|4 - U_n| \Leftrightarrow |4 - U_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|4 - U_n|$ et comme $0 \leq U_n \leq 4$ alors

$$4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}, 4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$$

5) D'après 4)

$$0 \leq 4 - U_1 \leq \frac{1}{2}(4 - U_0)$$

$$0 \leq 4 - U_2 \leq \frac{1}{2}(4 - U_1)$$

\vdots

$$0 \leq 4 - U_n \leq \frac{1}{2}(4 - U_{n-1})$$

en multipliant membre à membre ces inégalités, on a $0 \leq 4 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - U_0) \Leftrightarrow 0 \leq 4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - U_n = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 4$$

6) Etudions la convergence de la suite V définie par $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = n^2(4 - U_n)$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \ 4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow n^2(4 - U_n) \leq 4n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$n^2(4 - U_n) \leq \frac{4n^2}{2^n}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

EXERCICE 20

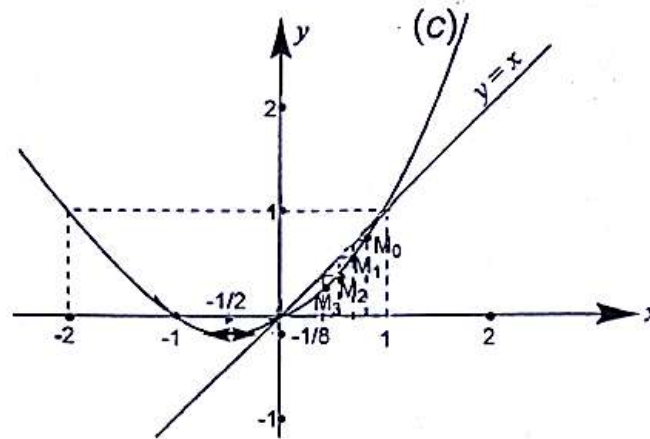
La suite (U_n) est définie sur \mathbb{N} par $U_0 = \frac{3}{4}$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n^2 + \frac{1}{2}U_n$

1) Traçons la courbe $\mathcal{C}: y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ et déduisons – en la construction des points $M_n(U_n, U_{n+1})$

pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ y' = x + \frac{1}{2}$$

x	\leftarrow	$-1/2$	\rightarrow
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$-1/8$	$+\infty$



Cette figure nous suggère une convergence de la suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers le point $O(0,0)$

2) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 < U_n < 1$

$$U_0 = \frac{3}{4} \Rightarrow 0 < U_0 < 1$$

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 < U_n < 1$ et montrons alors que $0 < U_{n+1} < 1$

$$\text{On a : } 0 < U_n < 1 \text{ et } U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8}$$

$$0 < U_n < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < U_n + \frac{1}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} < \left(U_n + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} < 1 \Rightarrow 0 < U_{n+1} < 1$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 < U_n < 1$

3) Montrons que la suite (U_n) est décroissante $\forall n \in \mathbb{N} \ U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2} U_n^2 - \frac{1}{2} U_n = \frac{1}{2} U_n (U_n - 1)$

Comme $\forall n \in \mathbb{N} \ 0 < U_n < 1$ alors $\frac{1}{2} U_n (U_n - 1) < 0$ d'où la suite (U_n) est décroissante.

4) Montrons que tout $n \in \mathbb{N} \ U_{n+1} \leq \frac{7}{8} U_n$

La suite (U_n) étant décroissante alors $\forall n \in \mathbb{N} \ U_n \leq U_0$

$$\Rightarrow U_n \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} U_n \leq \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} U_n + \frac{1}{2} \leq \frac{7}{8}$$

Comme $0 < U_n < 1$, alors $U_n \left(\frac{1}{2} U_n + \frac{1}{2} \right) \leq \frac{7}{8} U_n$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} U_n^2 + \frac{1}{2} U_n \leq \frac{7}{8} U_n \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N} \ U_{n+1} \leq \frac{7}{8} U_n$$

$$5) \text{ D'après (4) } \begin{cases} 0 < U_1 \leq \frac{7}{8} U_0 \\ 0 < U_2 \leq \frac{7}{8} U_1 \\ 0 < U_3 \leq \frac{7}{8} U_2 \\ \vdots \\ 0 < U_n \leq \frac{7}{8} U_{n-1} \end{cases}$$

En multipliant membre à membre ces inégalités

$$\text{On a : } 0 < U_n \leq \left(\frac{7}{8} \right)^n U_0$$

Puisque $0 < \frac{7}{8} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n U_0 = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

EXERCICE 21

Les suites (U) et (V) sont définies par

$$U_0 = 2, U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 5}{2U_n} \quad n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{U_n - \sqrt{5}}{U_n + \sqrt{5}}$$

1) Montrons que tout $n \in \mathbb{N}$ $V_{n+1} = V_n^2$

$$\text{On a : pour tout } n \in \mathbb{N} \quad V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - \sqrt{5}}{U_{n+1} + \sqrt{5}} = \frac{\frac{U_n^2 + 5}{2U_n} - \sqrt{5}}{\frac{U_n^2 + 5}{2U_n} + \sqrt{5}}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n^2 - 2\sqrt{5}U_n + 5}{U_n^2 + 2\sqrt{5}U_n + 5} = \left(\frac{U_n - \sqrt{5}}{U_n + \sqrt{5}}\right)^2 \quad \text{d'où } V_{n+1} = V_n^2$$

$$\text{On a alors : } V_1 = V_0^2; V_2 = V_1^2 = V_0^4 = V_0^{2^2}$$

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$, $V_n = V_0^{(2^n)}$ et montrons alors que $V_{n+1} = V_0^{(2^{n+1})}$

$$V_{n+1} = V_n^2 = \left(V_0^{(2^n)}\right)^2 = V_0^{(2^n)} \times V_0^{(2^n)} = V_0^{(2^n + 2^n)} = V_0^{(2^{n+1})}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = V_0^{(2^n)}$

2) Montrons que l'on a $V_0 = -\frac{1}{(2+\sqrt{5})^2}$

$$V_0 = \frac{U_0 - \sqrt{5}}{U_0 + \sqrt{5}} = \frac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} = \frac{(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})}{(2 + \sqrt{5})^2} = -\frac{1}{(2 + \sqrt{5})^2}$$

$$5 > 4 \Rightarrow \sqrt{5} > 2 \Rightarrow 2 + \sqrt{5} > 4 \Rightarrow (2 + \sqrt{5})^2 > 16$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2 + \sqrt{5})^2} < \frac{1}{16} \Rightarrow -\frac{1}{16} < -\frac{1}{(2 + \sqrt{5})^2} < \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \left| -\frac{1}{(2 + \sqrt{5})^2} \right| < \frac{1}{16} \Rightarrow |V_0| < \frac{1}{16}$$

on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$

$$|V_0| < \frac{1}{16} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_0^{2^n} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

Puisque $V_n = \frac{U_n - \sqrt{5}}{U_n + \sqrt{5}}$ alors $V_n \cdot U_n + \sqrt{5}V_n - \sqrt{5} = U_n - \sqrt{5}$

$$U_n(v_n - 1) = -\sqrt{5}U_n - \sqrt{5} \Rightarrow U_n = -\frac{\sqrt{5}v_n + \sqrt{5}}{v_n - 1}$$

Et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{-\sqrt{5}}{-1} = \sqrt{5}$

EXERCICE 22

(D) est une droite, B et C sont deux points distincts de (D) et $\left(B; \overrightarrow{BC}\right)$ un repère de (D).

B a pour abscisse 0 et C a pour abscisse 1 dans le repère $(B; \overrightarrow{BC})$.

A_n est le point d'abscisse x_n dans le repère $\left(B; \overrightarrow{BC}\right)$ $n \in \mathbb{N}$

1) calcul de x_0 , x_1 , et x_2

A_0 barycentre de $(B, \frac{1}{3})$, $(C, \frac{2}{3})$ a pour abscisse $x_0 = \frac{0 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

$$x_0 = \frac{2}{3}$$

A_1 barycentre de $(A_0, \frac{1}{3})$, $(B, \frac{2}{3})$ a pour abscisse $x_1 = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times 0}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{2}{9}$

$$x_1 = \frac{2}{9}$$

A_2 barycentre de $(A_1, \frac{1}{3})$, $(A_0, \frac{2}{3})$; a pour abscisse $x_2 = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{14}{27}$

$$x_2 = \frac{14}{27}$$

2) Pour tout $n \geq 2$, A_n est le barycentre de $(A_{n-1}, \frac{1}{3})$, $(A_{n-2}, \frac{2}{3})$

a) Montrons que $\forall n \geq 2 \quad x_n = \frac{1}{3}(x_{n-1} - x_{n-2}) + x_{n-2}$

$$A_n \text{ a pour abscisse } x_n = \frac{\frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{2}{3}x_{n-2}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{2}{3}x_{n-2}$$

$$x_n = \frac{1}{3}x_{n-1} - \frac{1}{3}x_{n-2} + x_{n-2} \text{ d'où } x_n = \frac{1}{3}(x_{n-1} - x_{n-2}) + x_{n-2}$$

$$b) \text{ On a : } \begin{cases} x_2 = \frac{1}{3}(x_1 - x_0) + x_0 \\ x_3 = \frac{1}{3}(x_2 - x_1) + x_1 \\ \dots \\ x_n = \frac{1}{3}(x_{n-1} - x_{n-2}) + x_{n-2} \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre ces égalités on a : $x_n + x_{n-1} = \frac{1}{3}(x_{n-1} - x_0) + x_1 + x_0$

En remplaçant x_1 et x_0 par leurs valeurs on a : $x_n = \frac{1}{3}x_{n-1} - \frac{1}{3}x_0 + x_1 + x_0 - x_{n-1}$

$$x_n = -\frac{2}{3}x_{n-1} + x_1 + \frac{2}{3}x_0 = -\frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9}$$

$$x_n = -\frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{2}{3}$$

c) Montrons que la suite (V) définie par $V_n = x_n - \frac{2}{5}$ est une suite géométrique : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$V_{n+1} = x_{n+1} - \frac{2}{5} \text{ et } x_{n+1} = -\frac{2}{3}x_n + \frac{2}{3}$$

$$\text{d'où } V_{n+1} = -\frac{2}{3}x_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = -\frac{2}{3}x_n + \frac{4}{15}$$

$$V_{n+1} = -\frac{2}{3}\left(x_n - \frac{2}{5}\right)$$

$V_{n+1} = -\frac{2}{3} V_n$ donc la suite (V) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{2}{3}$

$$V_n = V_0 q^n; V_0 = x_0 - \frac{2}{5} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$$d'où V_n = \frac{4}{15} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$V_n = x_n - \frac{2}{5} \Rightarrow x_n = V_n + \frac{2}{5}$$

$$x_n = \frac{4}{15} \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{5}$$

$$3) \left| -\frac{2}{3} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{2}{5}$$

Donc la position limite des points A_n lorsque n tend vers l'infini, est le point de la droite D d'abscisse $\frac{2}{5}$ dans le repère $(B; \vec{BC})$

EXERCICE 26

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x} \, dx$

1) Calcul de I_0 :

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+x} \, dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}} \, dx = \left[\frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \left[\frac{2}{3} (1+x) \sqrt{1+x} \right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$$

Calcul de I_1 :

$$I_1 = \int_0^1 x \sqrt{1+x} \, dx$$

$$\text{posons } \begin{cases} u = x \\ v' = \sqrt{1+x} \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} u' = 1 \\ v = \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$I_1 = \left[\frac{2}{3} x (1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \, dx = \left[\frac{2}{3} x (1+x) \sqrt{1+x} \right]_0^1 - \left[\frac{4}{15} (1+x)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{2}{3} x (1+x) \sqrt{1+x} \right]_0^1 - \left[\frac{4}{15} (1+x)^2 \sqrt{1+x} \right]_0^1$$

$$I_1 = \frac{4}{3} \sqrt{2} - \frac{16}{15} \sqrt{2} + \frac{4}{15} = \frac{4\sqrt{2}+4}{15}$$

2) La comparaison de x^n et x^{n+1} lorsque $0 \leq x \leq 1$ et $n \in \mathbb{N}$

$$x^{n+1} - x^n = x^n (x-1) \leq 0 \text{ car } 0 \leq x \leq 1$$

d'où $x^{n+1} \leq x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x \leq 1$

par suite $x^{n+1} \sqrt{1+x} \leq x^n \sqrt{1+x}$ car $\sqrt{1+x} > 0$ et $\int_0^1 x^{n+1} \sqrt{1+x} \, dx \leq \int_0^1 x^n \sqrt{1+x} \, dx$

soit $I_{n+1} \leq I_n$ donc la suite (I_n) est décroissante.

3) Pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq 1$ on a :

$$1 \leq 1+x \leq 2$$

$$1 \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{2}$$

$$x^n \leq x^n \sqrt{1+x} \leq x^n \sqrt{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{alors } \int_0^1 x^n \, dx \leq \int_0^1 x^n \sqrt{1+x} \, dx \leq \int_0^1 x^n \sqrt{2} \, dx$$

$$\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1} \sqrt{2}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\text{d'où } \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

4) Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$

f est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 2 \leq 2\sqrt{1+x} \leq 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}$$

on a alors pour tout $x \in [0, 1]$ $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous réels a et b éléments de $[0, 1]$:

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|$$

pour tout $x \in [0, 1]$, en posant $b = 1$ et $a = x$ on aura : $|\sqrt{2} - \sqrt{1+x}| \leq \frac{1}{2}|1-x|$

comme $\sqrt{2} - \sqrt{1+x} \geq 0$ et $1-x \geq 0$ alors pour tout $x \in [0, 1]$ $\sqrt{2} - \sqrt{1+x} \leq \frac{1}{2}(1-x)$

on a : $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+x} \leq \frac{1}{2}(1-x) \Rightarrow \frac{1}{2}(x-1) \leq \sqrt{1+x} - \sqrt{2} \leq 0$

$\sqrt{2} + \frac{1}{2}(x-1) \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{2}$; en multipliant par x^n on a :

$$x^n \left[\sqrt{2} + \frac{1}{2}(x-1) \right] \leq x^n \sqrt{1+x} \leq x^n \sqrt{2} \Rightarrow \int_0^1 x^n \left[\sqrt{2} + \frac{1}{2}(x-1) \right] dx \leq \int_0^1 x^n \sqrt{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n \sqrt{2} dx$$

$$\int_0^1 \left(x^n \sqrt{2} + \frac{1}{2} x^{n+1} - \frac{1}{2} x^n \right) dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \sqrt{2} dx$$

$$\left[\frac{x^{n+1} \sqrt{2}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{2(n+2)} - \frac{x^{n+1}}{2(n+1)} \right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1} \sqrt{2}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)(n+1)} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

$$\text{puisque pour tout } n \in \mathbb{N} \quad 2(n+2)(n+1) \geq (n+1)^2 \Rightarrow -\frac{1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{2(n+2)(n+1)}$$

$$\text{et } \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)(n+1)}$$

$$\text{d'où } \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

EXERCICE 23

1) Démontrons par récurrence que U_n est majorée par 3.

$$U_1 = -1 \Rightarrow U_1 \leq 3$$

Supposons que pour tout entier naturel n , $n \geq 1$ $U_n \leq 3$ et montrons alors que $U_{n+1} \leq 3$ c-a-d

$$U_{n+1} - 3 \leq 0$$

$$U_{n+1} - 3 = \frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} - 3 = \frac{n}{2(n+1)} (U_n - 3)$$

puisque $U_n - 3 \leq 0$ alors $U_{n+1} - 3 \leq 0$ donc U_n est majorée par 3.

2) Sens de variation de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, n \neq 0 \quad U_{n+1} - U_n = \frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} - U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(n+2)(3-U_n)}{2(n+1)}$$

$U_n \leq 3 \Rightarrow 3 - U_n \geq 0$ d'où $U_{n+1} - U_n \geq 0$ donc la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

3) a) $V_n = n(3 - U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

montrons que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $V_{n+1} = (n+1)(3 - U_{n+1})$

$$V_{n+1} = (n+1) \left[3 - \left(\frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \right) \right]$$

$$V_{n+1} = \frac{3n}{2} - \frac{n}{2} U_n = \frac{1}{2} [n(3 - U_n)]$$

$V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n \Rightarrow$ la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme

$$V_1 = 3 - U_1 = 4$$

b) $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_1 = 4$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Soit } V_n = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \text{ d'autre part } V_n = n(3 - U_n)$$

$$\frac{1}{n} V_n = 3 - U_n, U_n = 3 - \frac{1}{n} V_n \text{ d'où } U_n = 3 - \frac{4}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

c) On a : $0 < \frac{1}{2} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3 - \frac{4}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right] = 3$$

EXERCICE 27

1) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$U_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \frac{U_n + 8}{2U_n + 1}$$

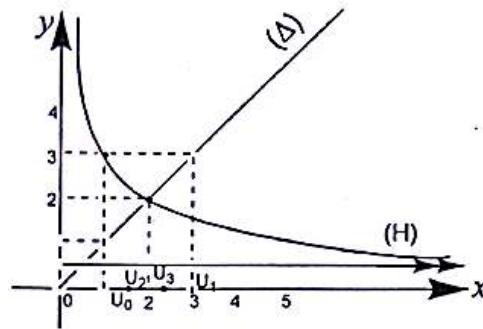
Calcul U_1, U_2, U_3 :

$$\text{Pour } n = 0, U_1 = \frac{U_0 + 8}{2U_0 + 1} = 3 \quad ; \quad \text{pour } n = 1, U_2 = \frac{U_1 + 8}{2U_1 + 1} = \frac{11}{7} = 1,57$$

$$\text{Pour } n = 2, U_3 = \frac{U_2 + 8}{2U_2 + 1} = \frac{67}{29} = 2,31$$

2) h est la fonction définie sur $\left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$ par $h(x) = \frac{x+8}{2x+1}$

(H) est la courbe représentative de h , (Δ) la droite d'équation $y = x$ dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j})



c) On peut prévoir la convergence de la suite (U_n) vers le réel 2, c-a-d $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2$

$$3) F(x) = \int_0^x e^{3t} \sin 2t \, dt$$

Prouver que $F(x) = G(x) - \frac{4}{9}F(x)$ où G est une fonction à déterminer.

$$\text{Posons } u(t) = \sin 2t \Rightarrow u'(t) = 2 \cos 2t$$

$$v'(t) = e^{3t} \Rightarrow v(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$$

$$F(x) = \left[\frac{1}{3}e^{3t} \sin 2t \right]_0^x - \frac{2}{3} \int_0^x e^{3t} \cos 2t \, dt$$

$$F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 2x - \frac{2}{3} \int_0^x e^{3t} \cos 2t \, dt$$

$$\text{posons } u_1(t) = \cos 2t \Rightarrow u_1'(t) = -2 \sin 2t$$

$$v_1'(t) = e^{3t} \Rightarrow v_1(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$$

$$F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 2x - \frac{2}{3} \left(\left[\frac{1}{3}e^{3t} \cos 2t \right]_0^x + \frac{2}{3} \int_0^x e^{3t} \sin 2t \, dt \right)$$

$$F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 2x - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}e^{3x} \cos 2x - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}F(x) \right)$$

$$F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 2x - \frac{2}{9}e^{3x} \cos 2x + \frac{2}{9} - \frac{4}{9}F(x) \Leftrightarrow F(x) = G(x) - \frac{4}{9}F(x)$$

$$\text{avec } G(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 2x - \frac{2}{9}e^{3x} \cos 2x + \frac{2}{9}$$

$$F(x) = G(x) - \frac{4}{9}F(x) \Leftrightarrow \frac{13}{9}F(x) = G(x)$$

$$F(x) = \frac{3}{13}e^{3x} \sin 2x - \frac{2}{13}e^{3x} \cos 2x + \frac{2}{13}$$

$$\text{justifions : } F'(x) = \left(\int_0^x e^{3t} \sin 2t \, dt \right)' = e^{3x} \sin 2x$$

$$\text{d'autre par } F'(x) = \left(\frac{3}{13}e^{3x} \sin 2x - \frac{2}{13}e^{3x} \cos 2x + \frac{2}{13} \right)'$$

$$F'(x) = e^{3x} \sin 2x$$

FONCTIONS NUMERIQUES

~ ENONCES ~

EXERCICE 1

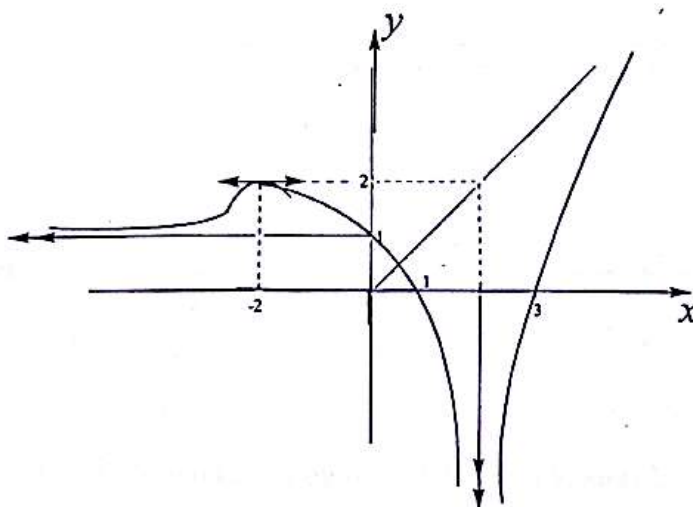
Trouver l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

- 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{x - E(x)}$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = \frac{x}{E(x)}$
- 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x + 1}}$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x + 1}}$
- 3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2 + |x| - 1}{|x| - 2}$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = \frac{1}{\cos x + \sin x}$
- 4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sqrt{\cos x - \sin x}$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{x - 1}$ si $x \leq 0$
et $\ln x$ si $0 \leq x \leq 1$
et $\frac{x + 2}{x^2 - 1}$ si $x \geq 1$

EXERCICE 2

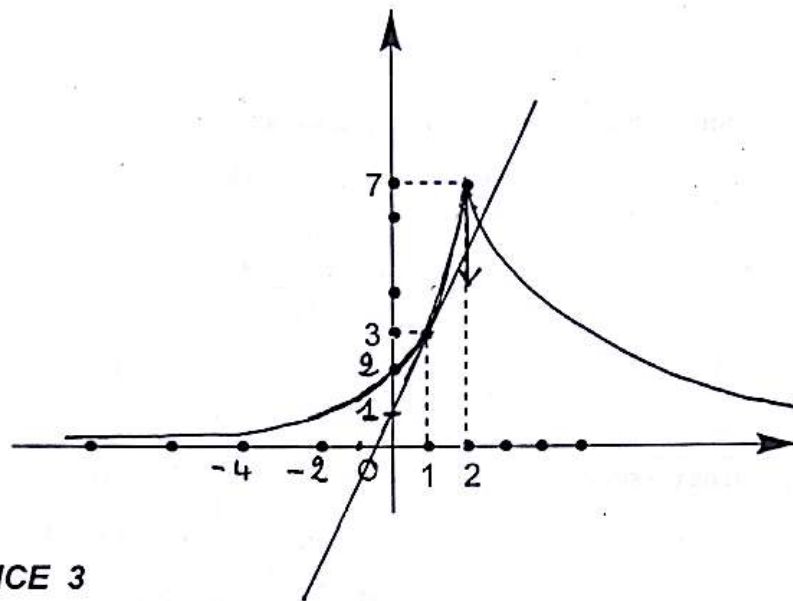
On considère les fonction numérique représentée par les courbes si dessous

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



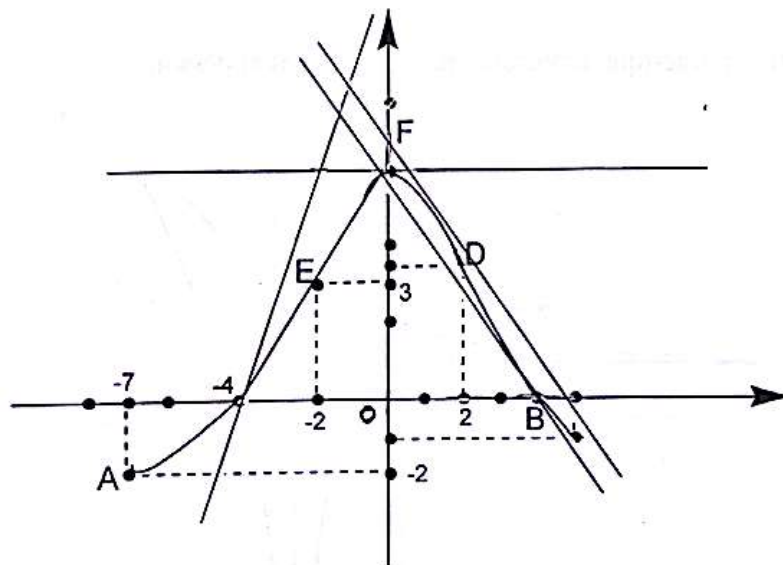
- a) Quel est l'ensemble de définition de f.
 - b) Calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition.
 - c) Donner les équation des asymptotes à C_f .
 - d) Calculer $f'(-2)$
- 2) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- a) quel est l'ensemble de définition de g ?
 - b) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1. En déduire $g'(1)$.
 - c) g est dérivable en $x_0 = 2$?

d) Montre que g réalise une bijection de $]-\infty; 2]$ vers un intervalle J à déterminer. Tracer $C_{g^{-1}}$ dans le même repère que C_g



EXERCICE 3

Soit f la fonction numérique sur $[-7; 5]$ et représentée par la courbe \mathcal{C} ci-dessous.



- 1) A partir des tangentes à (\mathcal{C}) aux points B et D. Montrer que pour $x \in [0; 4]$: $\frac{-5}{4}x + 5 \leq f(x) \leq \frac{-5}{4}x + 6$
- 2) Dédire de (1) un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^4 f(x) dx$
- 3) En se servant des segments $[CE]$ et $[AE]$ et des tangentes à \mathcal{C} aux points C et A. Trouver un encadrement de $J = \int_{-4}^0 f(x) dx$

EXERCICE 4

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

- 1) Quel est l'ensemble de définition D de f ? Calculer les limites aux bornes de D_f .
- 2) Calculer la dérivée f' de f et étudier le sens des variations de f .
- 3) On note (\mathcal{C}) la courbe représentant les variations de f . Etudier les branches infinies de (\mathcal{C}) . Construire (\mathcal{C}) dans un repère orthonormé du plan.

EXERCICE 5

On considère une fonction numérique f continue sur $[0;1]$ et satisfaisant, pour tout x de $[0;1]$ à $f(x) \in [0;1]$. Soit alors la fonction g définie sur $[0;1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

- 1) En appliquant à g le théorème des valeurs intermédiaires démontrer qu'il existe un réel a dans $[0;1]$ vérifiant $f(a) = a$.
- 2) On suppose de plus que f est dérivable sur $]0;1[$ et que sa dérivée vérifie, pour tout x de $]0;1[$, la condition $f'(x) < 1$. Démontrer alors que a est unique.

EXERCICE 6

Soit g une fonction numérique définie par $g(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$

- 1) Etudier la parité et la périodicité de g et $|g|$
- 2) On donne une fonction numérique h paire et périodique de période $T = 2$ telle que $h(x) = 2 - x$ pour $x \in [0;1]$. Etudier et représenter graphiquement h pour $-3 \leq x \leq 3$.
- 3) Résoudre graphiquement $h(x) = |g(x)|$.

EXERCICE 7

A – a) Etudier les variations de la fonction numérique f définie par $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2} + 1$. Soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative de f . Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé.

b) Donner l'équation de la tangente T à la courbe (\mathcal{C}_f) au point d'ordonnée nulle. Déterminer $T \cap \mathcal{C}_f$.

B – Soit la fonction numérique g définie par $g(x) = |2x| + 1 + \frac{1}{x^2}$

- a) Montrer que $\forall x < 0$; $g(x) > f(x)$
- b) Montrer que la courbe (\mathcal{C}_g) de g admet un axe de symétrie. En déduire le tracé de la courbe (\mathcal{C}_g) dans le même repère que (\mathcal{C}_f)
- c) soit $B(m)$ l'aire comprise entre \mathcal{C}_f , \mathcal{C}_g , la droite d'équation $x = -1$ et $x = m$ avec $m \in]-1; 0[$. Calculer $B(m)$ et $\lim_{m \rightarrow 0^-} B(m)$

C – Soit la droite Δ_m d'équation $y = m$

- a) Pour quelles valeurs de m cette droite coupe-t-elle \mathcal{C}_f en trois points M_1, M_2, M_3 .
- b) Soit x_1, x_2 et x_3 les abscisses de ces 3 points M_1, M_2, M_3 . Calculer $x_1 + x_2 + x_3$ et $x_1 x_2 x_3$. En déduire une relation indépendante de m entre les abscisses de ces 3 points M_1, M_2, M_3 .

EXERCICE 8

Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$.

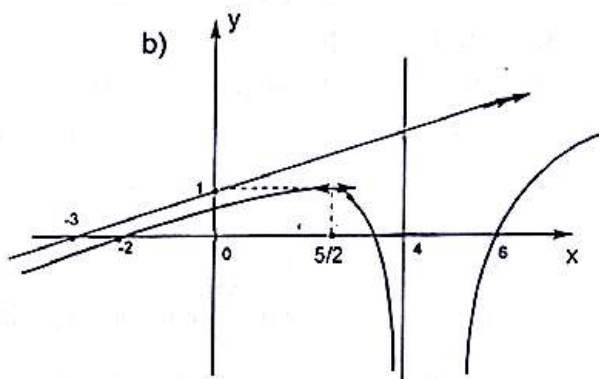
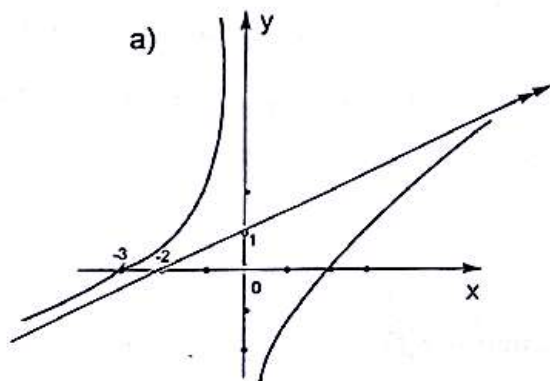
- 1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe \mathcal{C} dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) (d'unité 2cm).
- 2) Montrer que f admet une réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition. Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ en fonction de x .
- 4) Tracer dans le même repère que \mathcal{C} la courbe \mathcal{C}' de f^{-1} .
Déterminer les points commun à \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

EXERCICE 9

- 1) Tracer dans un repère orthonormé du plan la courbe représentant les variations d'une fonction f dont Voici le tableau de variations

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		-		+
$f(x)$	0			$+\infty$

- 2) Donner à partir de la représentation graphique, le tableau de variation et les équations des asymptotes dans les cas suivants :

**EXERCICE 10**

Etudier les variations de la fonction g de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $g(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$. Trouver les asymptotes à \mathcal{C} de g et les tangentes aux points particuliers.

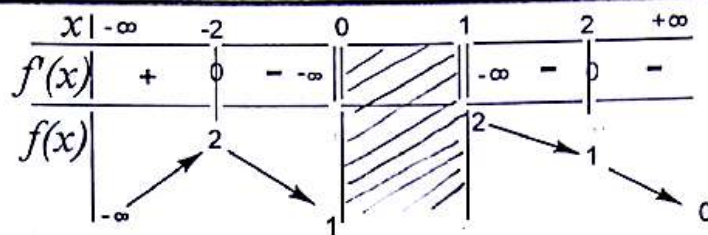
EXERCICE 11

On considère la fonction numérique f_m définie par : $x \rightarrow f_m(x) = \ln[x^2 - 2(m+1)x + 2m+2]$

- 1) Déterminer m pour que f_m soit définie sur \mathbb{R} .
- 2) Démontrer que toutes les courbes (\mathcal{C}_m) des fonctions f_m passent par un point fixe A que l'on Déterminera.

EXERCICE 12

On donne le tableau de variation d'une fonction f



D'autre part : $f(-3) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 1$

D'après ces données :

- Préciser l'ensemble de définition de f
- Ecrire les équations des asymptotes à la courbe (\mathcal{C}) de f
- Tracer (\mathcal{C}) dans le plan muni du repère orthonormé

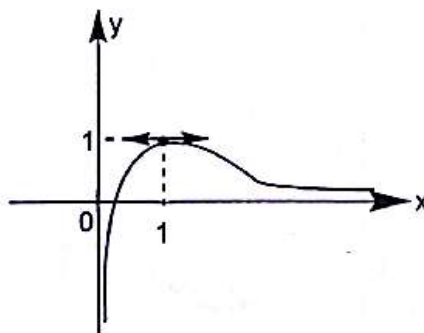
EXERCICE 13

Soit la fonction numérique définie par $f(x) = x + \sin x$

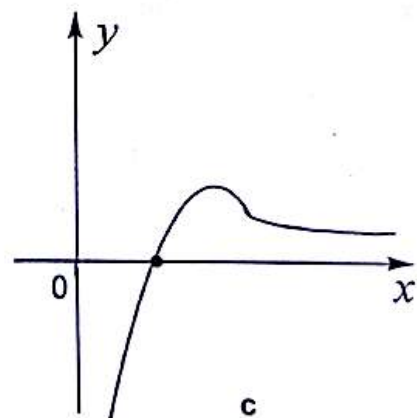
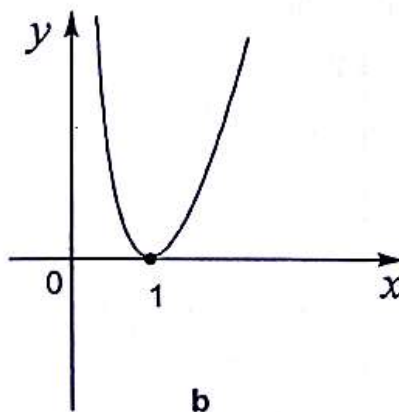
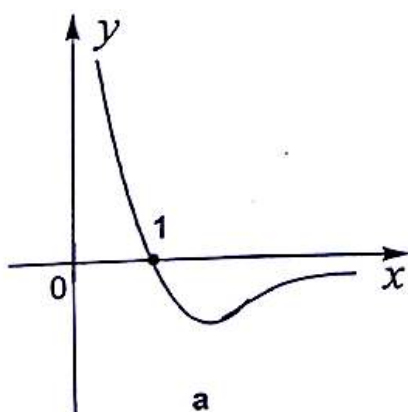
- 1) Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un centre de symétrie.
- 2) Montrer que cette courbe admet une direction asymptotique que l'on déterminera.
- 3) Calculer $f'(x)$, étudier son signe. Déterminer les points d'inflexion de la courbe.
- 4) Tracer cette courbe sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

EXERCICE 14

On considère la fonction f de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont la représentation graphique, dans un repère orthonormé, est donnée ci-dessous.



Parmi les 3 représentations graphiques ci-dessous quelle est la seule qui soit susceptible de représenter la fonction dérivée f' de f (Expliquer votre choix) ?



EXERCICE 15

Soit la fonction numérique définie par $x \geq 0$ par $f(x) = x(x - E(x))$; $E(x)$ désignant la partie entière de x .

- 1) Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ construire la représentation graphique de f pour $x \in [0; 3]$
- 2) Soit $k \in \mathbb{N}$; déterminer $f(x)$ pour $x \in [k; k+1]$ puis calculer $U_k = \int_k^{k+1} f(x) dx$
- 3) Calculer $U_{k+1} - U_k$; en déduire que (U_n) , $n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique dont on calculera la raison et le premier terme
- 4) Calculer $\int_0^n f(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$

EXERCICE 16

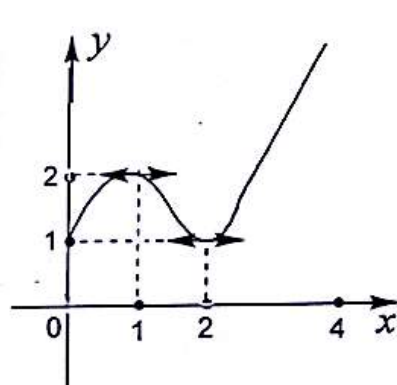
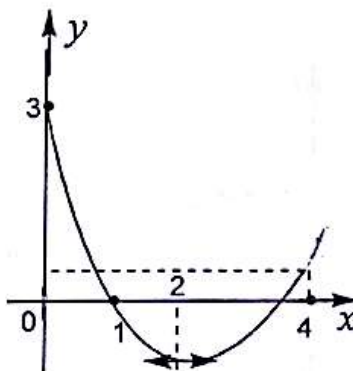
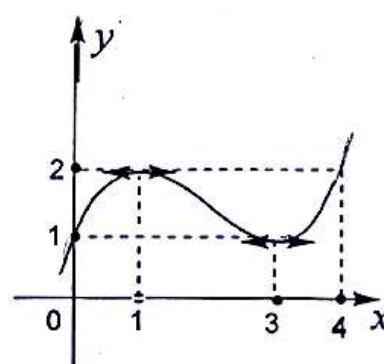
Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{3}$. Calculer $f(-1)$; $f(0)$; $f(\frac{-1}{2})$ et $f(1)$.

En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet trois racines réelles distinctes comprises entre -1 et 1 .

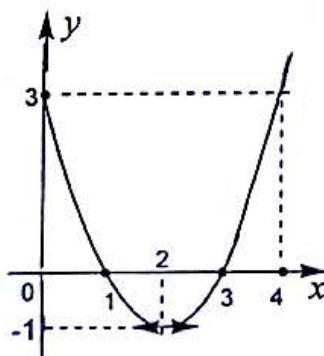
Calculer $\cos 3a$ en fonction de $\cos a$. Posant alors $x = \cos a$; en déduire les trois racines de l'équation $f(x) = 0$ sous forme trigonométrique.

EXERCICE 17

On connaît une partie des représentation graphiques de trois fonctions polynômes du troisième degré : $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ à coefficient réels, donnée par les figures 1, 2 et 3.

**Figure 1****Figure 2****Figure 3**

L'une des 3 fonctions précédentes a pour fonction dérivée une fonction f du second degré dont la représentation graphique est donnée par la figure 4

**Figure 4**

1) Quelle est celle des 3 fonctions 1, 2 et 3 qui a pour dérivée f ? (la réponse devra être soigneusement justifiée).

On notera F cette fonction. Que représente F pour f

2) Montrer que f est définie sur \mathbb{R} et donner l'expression de $f(x)$.

3) Montrer que F est définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$

Donner le tableau de variation de F .

EXERCICE 18

Le graphique ci – contre représente une parabole (P) et sa tangente (T) en un point A . Cette parabole passe par les points $A(2; 4)$ et $B(-2; -2)$

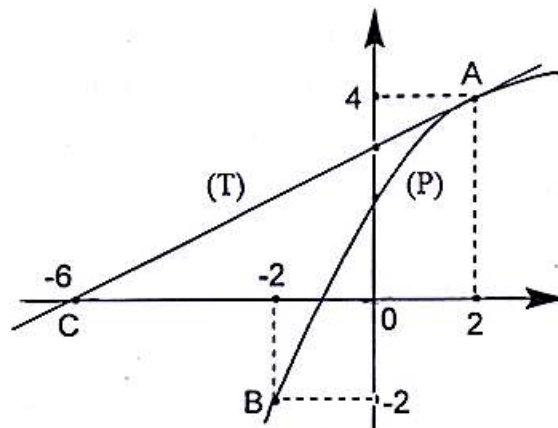
1) La droite (T) coupe l'axe des abscisses au point $C(-6; 0)$. Donner une équation de (T) .

2) (P) est la représentation graphique d'une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$; f' désigne la dérivée de f . Déduire de la première question la valeur de $f'(2)$.

3) Pour quelles raisons les réels a, b, c vérifient – ils les relations

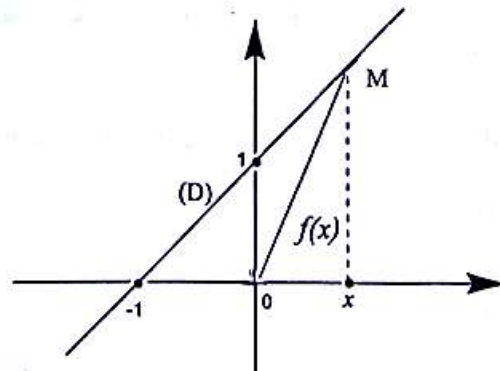
$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 4 \\ 4a - 2b + c = -2 \\ 4a + b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

4) Résoudre le système ci – dessous puis en déduire une équation de (P) .



EXERCICE 19

Soit (D) la droite d'équation $y = x + 1$. A tout réel x on associe le point M de (D) d'abscisse x et on note $f(x)$ la distance OM .



- 1) Déterminer graphiquement les variations de f et les limites en $+\infty$ et en $-\infty$
 - 2) Expliciter $f(x)$
 - 3) Montrer que \mathcal{C}_f admet en $+\infty$ une asymptote d'équation : $y = \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)$.
 - 4) Montrer graphiquement que \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ comme axe de symétrie.
- En déduire l'existence d'une asymptote en $-\infty$

EXERCICE 20

P désigne la parabole d'équation $y = 1 - x^2$

Pour tout réel x , on note $f(x)$ coefficient directeur (lorsqu'il existe) de la droite (OM) ou M est le point de P d'abscisse x .

- 1) Déterminer géométriquement l'ensemble de définition, la parité, les limites en $+\infty$, $-\infty$ et 0, et les variations de la fonction f .
- 2) Donner l'expression de $f(x)$ puis étudier le comportement de f en $+\infty$ et $-\infty$ (asymptote, position de \mathcal{C}_f par rapport à cette asymptote).

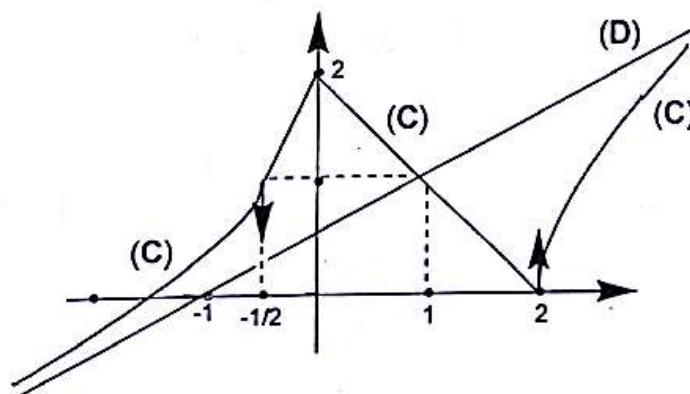
EXERCICE 21

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ on considère les points $A(2; 1)$ et $B(-3; -2)$. A tout point M de (Ox) d'abscisse x , on associe lorsque cela est possible le point m intersection des droites (AM) et (Oy), puis le point M' intersection des droites (Bm) et (Ox). On note $u(x)$ l'abscisse de M' .

- 1) Faire une figure ; montrer que $u(x)$ est définie pour $x \neq 2$ et $x \neq \frac{4}{3}$ et expliciter $u(x)$.
- 2) Etudier les limites de u en $+\infty$, $-\infty$, $\frac{4}{3}$ et montrer que $u(x)$ admet un prolongement continu en 2.
- 3) Interpréter géométriquement ces résultats.

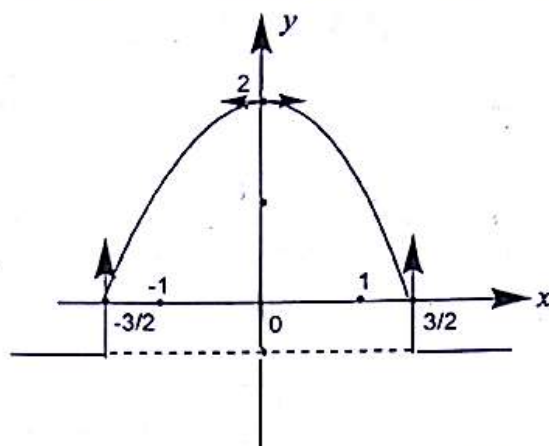
EXERCICE 22

- 1) Sur la figure ci – dessous D est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}(x + 1)$ et \mathcal{C} la représentation graphique d'une fonction f définie sur \mathbb{R}



Etudier la fonction f : ensemble de définition, valeurs remarquables, sens de variations, limites, courbe représentative

- 2) Même questions avec la courbe (\mathcal{C}) ci – dessous.



(Envisager dans ce cas la parité de f')

EXERCICE 23

On se propose de déterminer l'ensemble E de toutes fonctions f définies sur \mathbb{R} , deux fois dérivables et vérifiant $f'' + f = 0$ (c'est à dire $f''(x) + f(x) = 0$ pour tout x réel).

1) a) Montrer que toutes les fonctions nulles cosinus et sinus appartiennent à E .

b) Prouver que si f et g sont deux fonctions de E , $f + g$ et λf (λ réel) sont aussi des fonctions de E . En déduire que pour tous réels a et b : $x \mapsto a \cos x + b \sin x$ appartient à E .

2) a) Montrer que $f \in E$, alors $f^2 + f'^2$ est constante sur \mathbb{R} . Comment peut-on caractériser une fonction constante par sa dérivée ?

b) Soit f une fonction de E telle que $f(0) = f'(0) = 0$.

Utiliser la question (a) pour montrer que f est la fonction nulle.

3) Soit f une fonction de E et g la fonction $x \mapsto f(x) - f(0) \cos x - f'(0) \sin x$

a) Montrer que $g \in E$ (utiliser le (1) - b)

b) Calculer $g(0)$ et $g'(0)$. Déduire du (2) - b) que g est nulle sur \mathbb{R} .

c) Montrer que les fonctions de E sont toutes de la forme : $x \mapsto a \cos x + b \sin x$, a et b étant deux réels quelconques.

EXERCICE 24

1) Trouver une primitive F de f dans les cas suivants :

a) $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$; $g(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$; $u(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \sin x}}$

b) $f(x) = x \cos x + \sin x$; $g(x) = x \cos x^2$; $u(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$ pour $x \neq 1$

2) Dans chacun des cas suivants calculer : $\int_a^b f(x) dx$

a) $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$

b) $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = 9x^2 \sqrt{1 + x^3}$

c) $a = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$, $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x}$

d) $a = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$, $f(x) = \sin x \cos x$

3) En utilisant la méthode d'intégration par parties ; calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x\sqrt{x+1} dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} (x-1)\cos x dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x^2 \sin 3x dx \quad ; \quad \int_1^e x \ln x dx$$
$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad ; \quad \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx$$

EXERCICE 25

Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss :

$$1) \begin{cases} x + y + z + t = -1 \\ 3x - y + 2z - 5t = -26 \\ -x + z - 2t = -8 \\ 8x + 2y + t = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -2x + y - z - t = 3 \\ x - 2y + z - 2t = 7 \\ 3x + 2z + t = 5 \\ 2x - y + 2z - 2t = 15 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} -x + 3y + 7z = 4 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ -2x + 11y + 31z = 14 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + 2y = 23 \\ 3y + 4z = 60 \\ 2z + 7t = 88 \\ x + y = 15 \end{cases}$$

~ SOLUTIONS ~

EXERCICE 1

Ensemble de définition des fonctions

1) $f(x) = \frac{x}{x - E(x)}$: f est définie si $x \neq E(x)$ c-à-d si x n'est pas un entier rationnel donc

$$D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

 $g(x) = \frac{x}{E(x)}$: g est définie si $E(x) \neq 0$ ie $x \in [0, 1[$ d'où $D_g =]\leftarrow ; 0[\cup [1 \rightarrow[$ 2) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x + 1}}$: f est défini si $\begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 1} \geq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases}$ on obtient $D_f = [-2; -1[\cup [2; \rightarrow[$ $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x + 1}}$: g est définie si $\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$ on obtient $D_g = [2; \rightarrow[$ 3) $f(x) = \frac{x^2 + |x| - 1}{|x| - 2}$: f est définie si $|x| - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -2$ d'où $D_f = \mathbb{R} - \{2; -2\}$; $g(x) = \frac{1}{\cos x + \sin x}$: g est définie ssi $\cos x + \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ et $x \neq \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$ 4) $f(x) = \sqrt{\cos x - \sin x}$ f est définie ssi $\cos x - \sin x \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{x+2}{x^2-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{La fonction } g \text{ est définie sur } \mathbb{R}$$

EXERCICE 1

1) a) L'étude de la courbe de f nous permet de dire que f est définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$

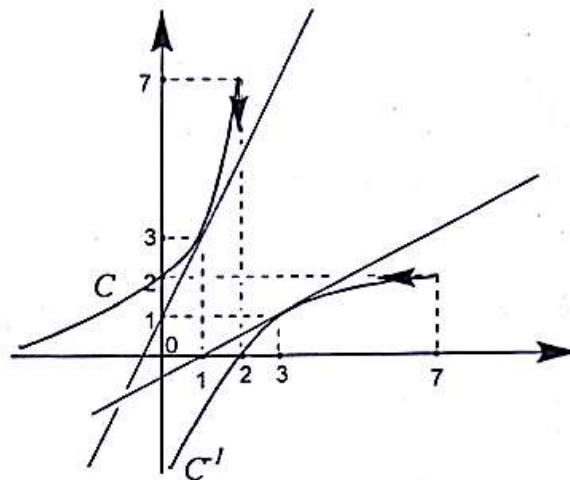
b) Le comportement de la courbe nous donne les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

c) Les asymptotes à la courbe de f sont les droites d'équations : $x = 2$; $y = 1$ et $y = x$ d) Puisque le point de coordonnées $(-2; 3)$ est un extremum alors $f'(-2) = 0$ 2) De l'étude du graphe de g on déduit que $D_g = \mathbb{R}$ b) La tangente à la courbe de g passe par les points de $(1, 3)$ et $(0, 1)$ d'où l'équation de cette tangente est $y = 2x + 1$; $g'(1)$ étant le coefficient directeur de la tangente alors $g'(1) = 2$

c) g n'est pas dérivable au point $x_0 = 2$ car la tangente en ce point est verticale.

d) D'après l'étude de la courbe de g on remarque que g réalise une bijection de $]-\infty, 2]$ vers $]0, 7]$



EXERCICE 3

1) La tangente à \mathcal{C} au point B est la droite (AB) et la tangente à \mathcal{C} au point D est la droite (FD) avec $A(0, 5)$; $B(4, 0)$; $F(0, 6)$ et $D(2, \frac{7}{2})$. On vérifie que (AB) a pour équation $y = -\frac{5}{4}x + 6$. De plus pour $x \in [0, 4]$ nous remarquons que \mathcal{C} est au dessus de (AB) et au dessous de (FD) d'où l'encadrement :

$$-\frac{5}{4}x + 5 \leq f(x) \leq -\frac{5}{4}x + 6$$

2) A partir de la première question on a : $\int_0^4 (-\frac{5}{4}x + 5) dx \leq \int_0^4 f(x) dx \leq \int_0^4 (-\frac{5}{4}x + 6) dx \Leftrightarrow$

$$\left[-\frac{5}{8}x^2 + 5x\right]_0^4 \leq I \leq \left[-\frac{5}{8}x^2 + 6x\right]_0^4 \Leftrightarrow 10 \leq I \leq 14$$

3) Nous avons $C(-4, 0)$; $E(-2, 3)$; $A(0, 5)$. La droite (CE) a pour équation : $y = \frac{3}{2}x + 6$ et (AE) a pour équation : $y = x + 5$. Graphiquement nous savons que pour $-4 \leq x \leq -2$ la courbe \mathcal{C} est au dessus de (CE) et au dessous de la tangente à \mathcal{C} en A qui a pour équation $y = 5$; pour $-2 \leq x \leq 0$ \mathcal{C} est au dessus de (AE) et au dessous de la droite : $y = 5$. Ainsi on a : $\frac{3}{2}x + 6 \leq f(x) \leq 5$ et $x + 5 \leq f(x) \leq 5$:

$$\int_{-4}^{-2} (\frac{3}{2}x + 6) dx \leq \int_{-4}^{-2} f(x) dx \leq \int_{-4}^{-2} 5 dx \Leftrightarrow \left[\frac{3}{4}x^2 + 6x\right]_{-4}^{-2} \leq \int_{-4}^{-2} f(x) dx \leq [5x]_{-4}^{-2} \Leftrightarrow 3 \leq \int_{-4}^{-2} f(x) dx \leq 10 \quad (1)$$

$$\int_{-2}^0 (x + 5) dx \leq \int_{-2}^0 f(x) dx \leq \int_{-2}^0 5 dx \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}x^2 + 5x\right]_{-2}^0 \leq \int_{-2}^0 f(x) dx \leq [5x]_{-2}^0 \Leftrightarrow 8 \leq \int_{-2}^0 f(x) dx \leq 10 \quad (2)$$

d'où de (1) et (2) on déduit $11 \leq \int_{-4}^0 f(x) dx \leq 20 \Leftrightarrow 11 \leq J \leq 20$

EXERCICE 4

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

1) f est définie ssi $\begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x^3}{x-1} \geq 0 \end{cases}$ ainsi $D =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

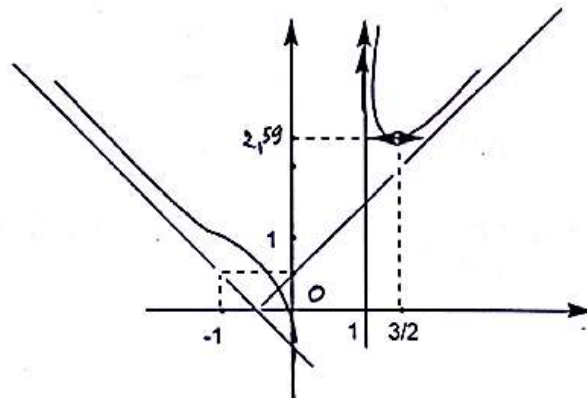
2) $f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2 \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Le tableau de variation de f est :

x	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$2,59$	$+\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ d'où la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à \mathcal{C}

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = -\frac{1}{2}$; d'où la droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à \mathcal{C}

de même on vérifie que la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à \mathcal{C} lorsque $x \rightarrow +\infty$



EXERCICE 5

$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue et g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(x) - x$

1) g est continue sur $[0, 1]$ car f l'est sur $[0, 1]$

$g(0) = f(0) \geq 0$; $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(1) \in [0, 1]$ donc $g(0) \times g(1) \leq 0$ d'où il existe au moins un réel a dans $[0, 1]$ tel que $g(a) = 0$.

$$g(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) - a = 0 \Leftrightarrow f(a) = a$$

2) Si $f'(x) < 1$ pour $x \in]0, 1[$ alors $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$.

La fonction est dans ce cas strictement décroissante, elle définit donc une bijection de $[a, 1]$ sur $[g(1); g(0)]$ ce cas prouve que $g(a) = 0$ admet une seule solution ie $f(a) = a$ admet une solution.

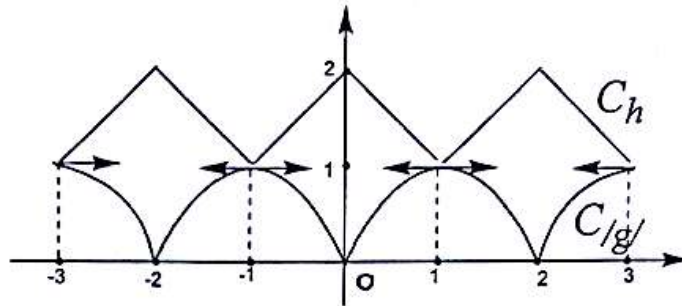
EXERCICE 6

$$g(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$$

1) La fonction g est impaire et périodique de période $T = 4$.

La fonction $|g|$ est pair et périodique de période $T = 4$

2) La fonction h étant pair et périodique de période $t = 2$; il suffit de la représenter sur $[0, 1]$. Sur cet intervalle la courbe de h est un segment. On obtient le reste de la courbe en appliquant la symétrie par rapport à (oy) et en appliquant la périodicité



3) La fonction $|g|$ étant pair et périodique de période 4 alors il suffit de l'étudier sur $[0, 2]$. Sur cet intervalle $|g(x)| = \sin \frac{\pi}{2} x$

$g(0) = g(2) = 0$; $g'(x) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. ie le tableau de variation suivant :

x	0	1	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	1	0

D'après la représentation graphique $h(x) = |g(x)| \Rightarrow x \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Ces valeurs de x sont les abscisses des points communs à \mathcal{C}_h et $\mathcal{C}_{|g|}$

EXERCICE 7

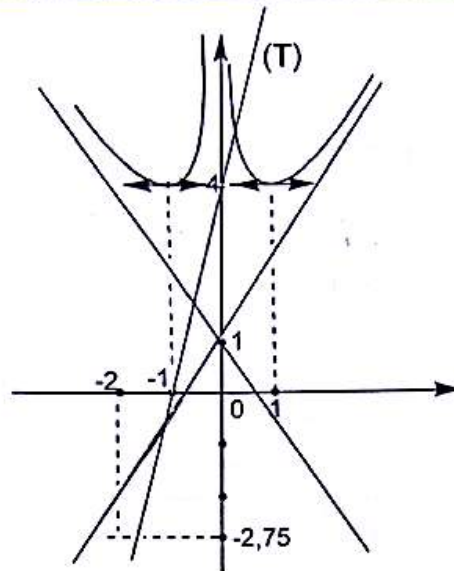
A - a) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2} + 1$. $D_f = \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

Les droites d'équations $x = 0$ et $y = 2x + 1$ sont des asymptotes à la courbe \mathcal{C}_f .

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3} ; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 : \text{Le tableau de variation de } f$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$



b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Le point d'ordonnée nulle de \mathcal{C}_f a pour abscisse -1 .

$f'(-1) = 4$ d'où l'équation de la tangente (T) est $y = 4(x + 1)$. $M(x, y) \in T \cap \mathcal{C}_f \Leftrightarrow f(x) = Y$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 + \frac{1}{x^2} = 4x + 4 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \text{ d'où } T \cap \mathcal{C}_f = \left\{ A_1(-1, 0) ; A_2\left(\frac{1}{2}, 6\right) \right\}$$

B - a) $g(x) = |2x| + 1 + \frac{1}{x^2}$.

Si $x < 0$ alors $g(x) = -2x + \frac{1}{x^2} + 1$ et $g(x) - f(x) = -4x$ qui est positif donc $g(x) > f(x)$

b) La fonction g est pair donc sa courbe admet l'axe (oy) comme axe de symétrie. (Voir le graphe) : \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_f coïncident pour $x > 0$

b) pour $x \in]-1; 0[$ $g(x) > f(x)$ donc $B_m = \int_{-1}^m (g(x) - f(x)) dx$

$$B_m = \int_{-1}^m -4x dx = \left[-2x^2 \right]_{-1}^m \Leftrightarrow B_m = -2m^2 + 2 ; \lim_{m \rightarrow 0^-} B_m = 2$$

C - Δ_m la droite d'équation $y = m$

a) D'après la représentation graphique Δ_m coupe \mathcal{C}_f en 3 points distincts M_1, M_2, M_3 , si $m > 4$

b) $M(x, y) \in \Delta_m \cap \mathcal{C}_f$ équivaut à : $f(x) = m \Leftrightarrow 2x + 1 + \frac{1}{x^2} = m \Leftrightarrow 2x^3 + (1 - m)x^2 + 1 = 0$ Si $x_1, x_2,$

x_3 sont les abscisses des points M_1, M_2, M_3 , alors x_1, x_2, x_3 sont solutions de l'équation. En identifiant les

deux expressions on obtient

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{m-1}{2} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

D'après ce système nous avons $x_1x_2x_3 = -\frac{1}{2}$ qui est une relation indépendante de m .

EXERCICE 8

$$f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$$

1) La fonction f est définie sur \mathbb{R} , elle est impaire car $f(-x) = -f(x)$ donc il suffit de l'étudier sur $[0; +\infty[$. $f(0) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Pour $x \in [0; +\infty[$ $f(x) = \frac{2x}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

x	0	\rightarrow
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	\nearrow 2

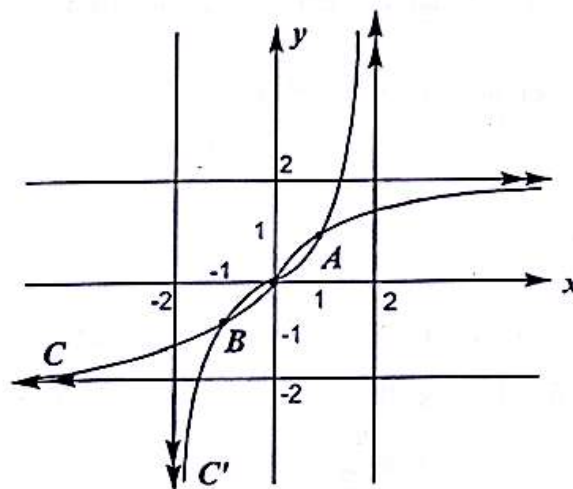
2) La fonction f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} à valeurs dans $] -2; 2[$, elle admet donc une bijection réciproque f^{-1} définie sur $] -2; 2[$.

Si $x > 0$ $f(x) = \frac{2x}{x+1} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{2-y}$

Si $x < 0$ $f(x) = \frac{2x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{2+y}$

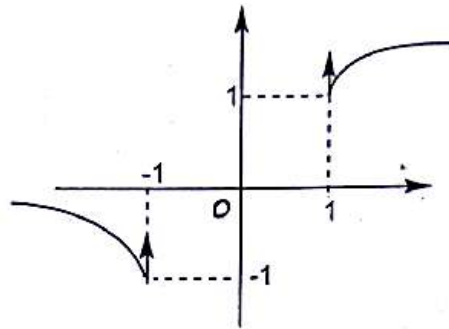
De ces deux expressions nous déduisons $f^{-1}(x) = \frac{x}{2-|x|}$. Les points communs à (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') sont

$B(-1, -1)$, $O(0, 0)$ et $A(1, 1)$



EXERCICE 9

1) D'après le tableau de variation de f la courbe de f est celle qui suit :



2) La fonction dont le graphe est donnée dans la question a) est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

Les asymptotes à la courbe \mathcal{C}_f sont les droites d'équations : $x = 0$ et $y = \frac{1}{2}x + 1$ (celle qui passe par les points de coordonnées $(0; 1)$; $(-2; 0)$)

b) Le tableau de variation de la fonction représentée dans la question est :

x	$-\infty$	$5/2$	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$	$+\infty$

Les asymptotes à g sont les droites d'équations $x = 4$ et $y = \frac{1}{3}x + 1$ (asymptote passant par les points $(0; 1)$ et $(-3; 0)$)

EXERCICE 10

$$g(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$$

La fonction g est définie sur \mathbb{R} :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 3 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 3x) = 0 \text{ donc la droite}$$

d'équation $y = 3x$ est une asymptote à \mathcal{C}_g .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - x) = 0 \text{ d'où la droite d'équation } y = x \text{ est une asymptote à } \mathcal{C}_g.$$

• $g(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$ pour $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ dans cet intervalle $g'(x) = 2 + \frac{x}{x^2 - 1}$

* Si $x \in]1; +\infty[$ $g'(x) > 0$

* Si $x \in]-\infty; -1[$, $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 1} + x \geq 0$ ce qui nous donne

$x \in]-\infty; -\frac{2\sqrt{3}}{3}[$ d'où $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1[$

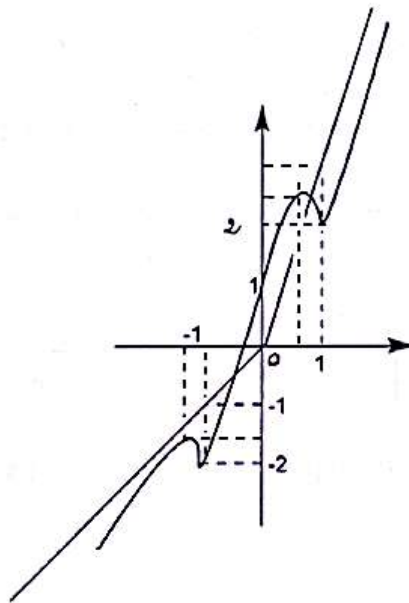
• $g(x) = 2x + \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in]-1; 1[$. Dans cet intervalle $g'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Cette dérivée est positive pour $x \in]-1; 0]$

* Si $x \in]0; 1[$, $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -5x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]0; \frac{2\sqrt{5}}{5}]$ et $g'(x) < 0$

* Si $x \in [\frac{2\sqrt{5}}{5}; 1[$ on en déduit le tableau de variation de g .

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	1	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$+$	0	$-$		$+$
$g(x)$			$g(x_1)$		$g(x_2)$				$+\infty$
			$-\infty$		-2		2		

N.B : $x_1 = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ et $g(x_1) = \sqrt{3}$, $g(x_2) = \sqrt{5}$



EXERCICE 11

$$f_m(x) = \ln(x^2 - 2(m+1)x + 2m+2)$$

1) f_m est définie sur \mathbb{R} ssi $x^2 - 2(m+1)x + 2m+2 > 0$ pour tout x réel

Pour cela il faut que le discriminant de $x^2 - 2(m+1)x + 2m+2$ soit strictement négatif ce qui nous donne $(m+1)^2 - 2(m+1) < 0 \Leftrightarrow 2(m+1)(m-1) < 0 \Leftrightarrow m \in]-1; 1[$

2) $A(x_0, y_0) \in (\mathcal{C}_m)$ pour tout m équivaut à $y_0 = f_m(x_0) = \ln(x_0^2 - 2(m+1)x_0 + 2m+2)$

$$\Leftrightarrow y_0 = \ln(x_0^2 - 2x_0 + 2 - 2(-x_0 + 1)m) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

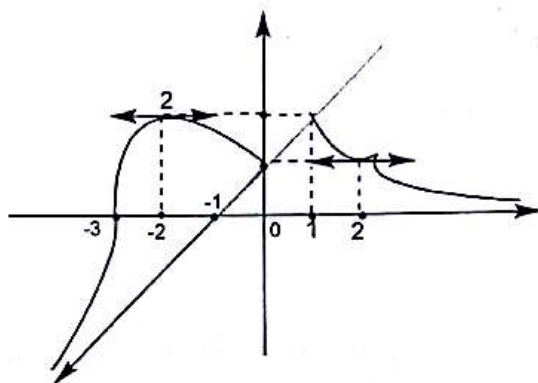
En conclusion toutes les courbes (\mathcal{C}_m) passent par le point $A(1, 0)$.

EXERCICE 12

1) D'après le tableau de variation de f l'ensemble de définition de f est $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$.

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à (\mathcal{C})

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 1$ implique la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à (\mathcal{C})



EXERCICE 13

$$f(x) = x + \sin x$$

1) $D_f = \mathbb{R}$: pour tout x réel $f(-x) = -(x + \sin x) = -f(x)$ donc la fonction f est impaire ce qui prouve que l'origine du repère est un centre de symétrie de la courbe de f .

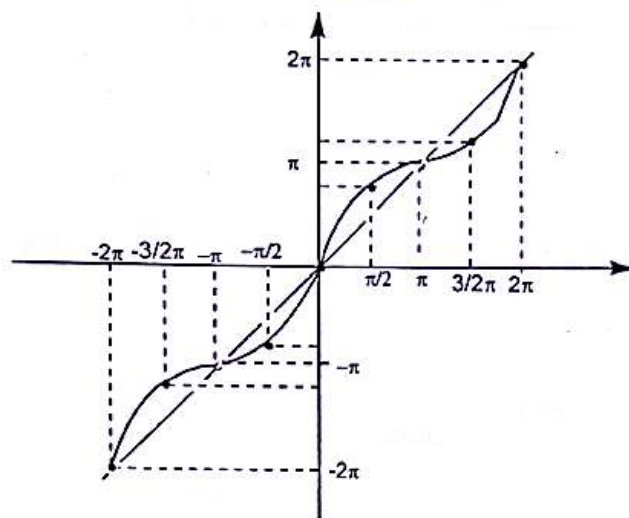
$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + \sin x}{x} \right) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ qui n'existe pas donc la droite d'équation $y = x$ est une direction asymptotique

de la courbe de f .

3) $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$ d'où f est croissante sur \mathbb{R}

$f''(x) = -\sin x$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ avec k entier rationnel d'où les points d'inflexion de \mathcal{C} sont $M_k(k\pi ; k\pi)$

**EXERCICE 14**

D'après le tableau de variation de f nous avons le tableau variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	0

Ainsi parmi les 3 représentations seule (a) est susceptible de représenter f car cette fonction est positive sur $]0; 1[$, nulle en 1 et négative sur $]1; +\infty[$.

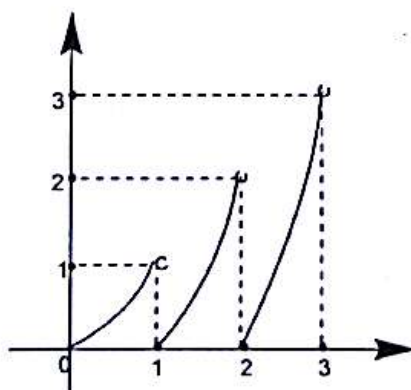
EXERCICE 15

$$f(x) = x(x - E(x))$$

1) Si $x \in [0; 1[$ $f(x) = x^2$

Si $x \in [1; 2[$ $f(x) = x(x - 1) = x^2 - x$

Si $x \in [2; 3[$ $f(x) = x(x - 2) = x^2 - 2x$; $f(3) = 0$



2) k étant un entier naturel, pour $x \in [k; k+1[$ $E(x) = k$ d'où

$$f(x) = x(x - k) = x^2 - kx \quad ; \quad f(k+1) = 0$$

$$U_k = \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_k^{k+1} (x^2 - kx) dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{kx^2}{2} \right]_k^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow U_k = \frac{(k+1)^3}{3} - \frac{k}{2}(k+1)^3 = \frac{k^3}{3} + \frac{k^3}{2}$$

$$U_k = \frac{1}{3}k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = \frac{1}{2}(k^3 + 2k^2 + k) = \frac{k^3}{3} + \frac{k^3}{2}$$

$$U_k = \frac{k}{2} + \frac{1}{3} \text{ d'où } U_k \equiv \frac{3k+2}{6}$$

$$3) U_{k+1} - U_k = \frac{3k+3+2}{6} - \frac{3k+2}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow U_{k+1} \equiv U_k + \frac{1}{2}$$

d'où la suite (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$

$$U_0 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2}$$

$$4) \int_0^n f(x) dx = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} = \frac{n}{2}(2U_0 + (n-1)r) \text{ on obtient } \int_0^n f(x) dx = \frac{n(3n+1)}{12}$$

EXERCICE 16

$$f(x) = 4x^2 - 3x - \frac{1}{2}$$

$$f(-1) = -\frac{3}{2}; f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}; f(x) = -\frac{1}{2}; f(1) = \frac{1}{2}. \text{ La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ car c'est une}$$

fonction polynôme. De plus $f(-1) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) \times f(0) < 0$ et $f(0) \times f(1) < 0$ donc, d'après

le théorème des valeurs intermédiaires il existe : $x_1 \in]-1; -\frac{1}{2}[$; $x_2 \in]-\frac{1}{2}; 0[$; $x_3 \in]0; 1[$ tels que : $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$. Ces 3 solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont comprise entre -1 et 1.

On sait que $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$, donc en posant $x = \cos a$ l'équation $f(x) = 0$ devient :

$$4\cos^3 a - 3\cos a - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 3a - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 3a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3a = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } -\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$




Ce qui nous donne $a = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$. En faisant varier k on obtient les 3 valeurs distinctes de a qui sont

$$a_0 = \frac{\pi}{9}; a_1 = \frac{5\pi}{9}; a_3 = \frac{7\pi}{9} \text{ les solutions de l'équation.}$$

$$f(x) = 0 \text{ sont } x_1 = \cos \frac{\pi}{9}; x_2 = \cos \frac{5\pi}{9} \text{ et } x_3 = \cos \frac{7\pi}{9}$$

EXERCICE 17

1) La représentation graphique de f nous permet d'avoir le tableau de variation suivant :

x	1		3		4
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Ce tableau de est compatible avec la courbe de la figure 3 car celle-ci est croissante entre 0 et 1 ; décroissante entre 1 et 3 et croissante entre 3 et 4.

f est la dérivée de F et F est une primitive de f

2) f étant une fonction polynôme du second degré elle est définie sur \mathbb{R} . D'après sa représentation graphique on a : $f(0) = 3$; $f(1) = 0$; $f(3) = 0$. Si $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors $f(0) = 3 \Leftrightarrow c = 3$; $f(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$; $f(3) = 0 \Leftrightarrow 9a + 3b + 3 = 0$. Ces deux équations nous donne $a = 1$ et $b = -4$ d'où $f(x) = x^2 - 4x + 3$

3) F étant une primitive de f alors $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + k$ puisque $F(0) = 1$ alors $k = 1$ par conséquent $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Le tableau de variation de F est :

x	1		3		$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	$-\infty$	2	1	$+\infty$	

EXERCICE 18

1) La tangente (T) passe par les points $A(2, 4)$ et $C(-6, 0)$ d'où son équation est $y = \frac{1}{2}x + 3$

2) D'après la première question la tangente à (P) au point $A(2, 4)$ a pour équation $y = \frac{1}{2}x + 3$ donc $f'(2) = \frac{1}{2}$.

3) $f(x) = ax^2 + bx + c$ Nous savons que $A \in (P)$ donc $f(2) = 4 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 4$; $B(-2, -2) \in (P)$ donc $f(-2) = -2 \Leftrightarrow 4a - 2b + c = -2$

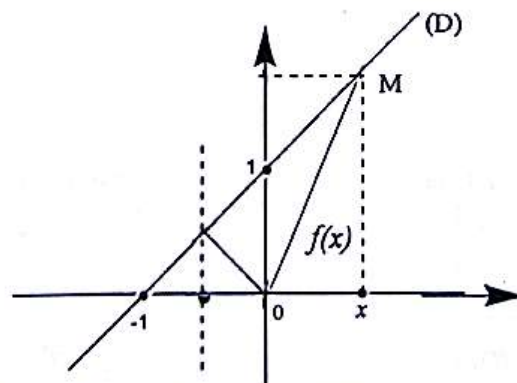
$f'(x) = 2ax + b$ et nous savons que $f'(2) = \frac{1}{2}$ donc $4a + b = \frac{1}{2}$

Ces 3 équations nous donnent le système (S)
$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 4 \\ 4a - 2b + c = -2 \\ 4a + b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

4) La résolution de ce système donne $b = \frac{3}{2}$; $a = -\frac{1}{4}$ et $c = 2$.

L'équation de (P) est $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

EXERCICE 19



1) Lorsque x varie sur l'axe des abscisses, la distance OM aussi varie. Nous savons que la distance du point O à la droite D est $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Cela correspond au point M de D d'où abscisse $x = -\frac{1}{2}$. Ainsi

si $x > -\frac{1}{2}$ f est croissante ; si $x < -\frac{1}{2}$ f est décroissante :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2) Le point M de D d'abscisse x a pour coordonnées $(x, x+1)$ d'où

$$f(x) = OM = \sqrt{x^2 + (x+1)^2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

3) On vérifie aisément que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{2}(x + \frac{1}{2})) = 0$ d'où la droite d'équation $y = \sqrt{2}(x + \frac{1}{2})$ est une asymptote à (\mathcal{C}_f) en $+\infty$.

4) La droite (OM) où M est le point de D d'abscisse $-\frac{1}{2}$ est la médiatrice du segment (AB) avec $A(0, 1)$ et $B(-1, 0)$ qui sont symétriques par rapport à M . De même pour x et x' symétriques par rapport à M

D'où la droite d'équation $y = -\sqrt{2}(x + \frac{1}{2})$ symétrique de $y = \sqrt{2}(x + \frac{1}{2})$ est asymptote à (\mathcal{C}_f) en $-\infty$.

EXERCICE 20

1) Géométriquement nous remarquons que pour tous les réels x non nuls la droite (OM) n'est pas parallèle à l'axe (oy) donc le coefficient directeur existe. $D_f = \mathbb{R}^*$.

Soit M et M' deux points de P d'abscisses x et $-x$, l'axe (oy) est la bissectrice de l'angle MOM' d'où les coefficients directeurs des droites (OM) et (OM') sont opposés ce qui prouve que $f(-x) = -f(x)$: f est alors impaire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

La fonction f est strictement décroissante sur $D_f = \mathbb{R}^*$

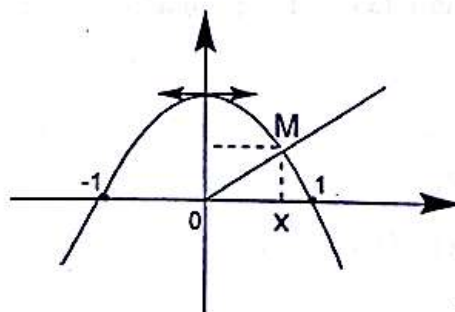
2) $f(x)$ étant le coefficient directeur de la droite (OM) alors $f(x) = \frac{y}{x}$ avec $y = 1 - x^2$ d'où

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x} \quad f(x) = -x + \frac{1}{x}$$

Nous savons que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ donc la droite d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à \mathcal{C}_f .

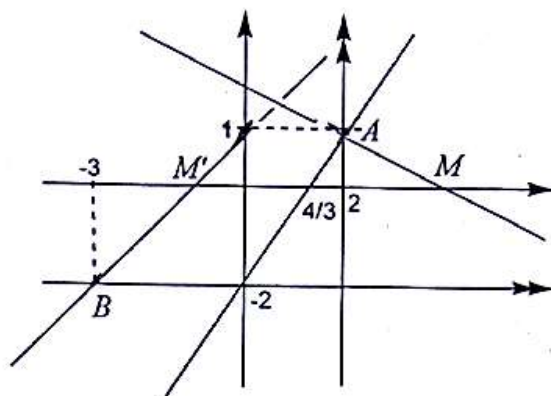
Si $x > 0$ alors \mathcal{C}_f est au dessus de son asymptote.

Si $x < 0$ alors \mathcal{C}_f est au dessous de son asymptote.



EXERCICE 21

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ on donne $A(2; 1)$ et $B(-3; -2)$



- 1) D'après la représentation ci dessus nous remarquons que $U(x)$ n'existe pas lorsque $x = 2$ ou $x = \frac{4}{3}$.
En effet ; si $x = 2$ la droite (AM) est parallèle à (oy) donc m n'existe pas ; si $x = \frac{4}{3}$ la droite (Bm) est parallèle à l'axe (ox) donc M' n'existe pas.

L'équation de la droite (AM) est de la forme $Y = aX + b$ $A(2; 1)$ et $M(x, 0)$ appartient à (AM) équivaut à

$$\begin{cases} 1 = 2a + b \\ 0 = ax + b \end{cases} \text{ on obtient } a = \frac{1}{2-x} \text{ et } b = \frac{x}{x-2} \text{ d'où l'équation de la droite (AM) } Y = \frac{1}{2-x}X + \frac{x}{x-2}$$

Le point m a pour coordonnées $\left(0; \frac{x}{x-2}\right)$

La droite (Bm) a pour équation : $Y = a'X + b'$. Puisque $B(-3, -2)$ et $m\left(0; \frac{x}{x-2}\right) \in (Bm)$ alors

$$\begin{cases} -2 = -3a' + b' \\ b' = \frac{x}{x-2} \end{cases} \text{ ce qui nous donne } a' = \frac{3x-4}{3(x-2)}$$

Ainsi l'équation de (Bm) est $Y = \frac{3x-4}{3(x-2)}X - \frac{x}{x-2}$.

Le point M' d'ordonnée nulle de (Bm) a pour abscisse $X = \frac{-3x}{3x-4}$ d'où $U(x) = \frac{-3x}{3x-4}$

N.B. : on résout l'équation $\frac{3x-4}{3(x-2)}X - \frac{x}{x-2} = 0$ pour obtenir $X = \frac{-3x}{3x-4}$

$$2) U(x) = \frac{-3x}{3x-4} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = -1 ; \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}^-} U(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}^+} U(x) = -\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} U(x) = -3$$

ainsi la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{-3x}{3x-4} & \text{si } x \neq \frac{4}{3} \\ f(x) = U(x) & \text{si } x \neq 2 \text{ et } x \neq \frac{4}{3} \end{cases}$ est un prolongement de continuité u au

point $x = 2$.

- 3) Les résultats de la 2^e question se traduisent par les droites d'équations $x = \frac{4}{3}$ et $y = -1$ sont asymptotes à la courbe de la fonction u

EXERCICE 22

- 1) L'étude de la courbe \mathcal{C} de f nous donne les résultats suivants :

- $f'(x) > 0$ pour $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]2; +\infty[$
- $f'(x) = 2$ sur $[-\frac{1}{2}; 0[$; $f'(x) = -1$ si $x \in]0; 2[$

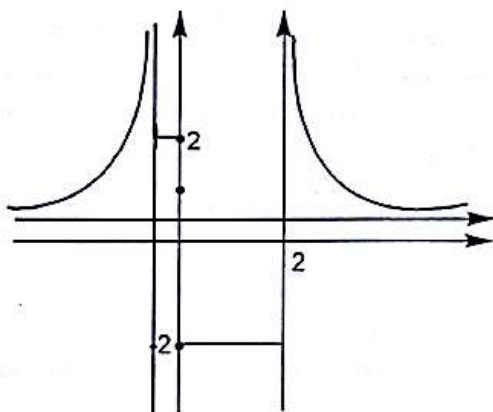
En effet sur $[-\frac{1}{2}; 0[$ \mathcal{C} est la droite de pente 2 et sur $]0; 2[$ \mathcal{C} est la droite de pente -1. La dérivée f' n'est pas définie pour $x = 2$.

L'ensemble de définition de f' est : $]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; 0[\cup]0; 2[\cup]2; +\infty[$ puisque $D : y = \frac{1}{2}(x+1)$ est asymptote à \mathcal{C} alors $[f(x) - \frac{1}{2}(x+1)] \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ donc $[f'(x) - \frac{1}{2}] \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f'(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f'(x) = 2 ; \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -1 ; \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = -1 ; \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = +\infty$$

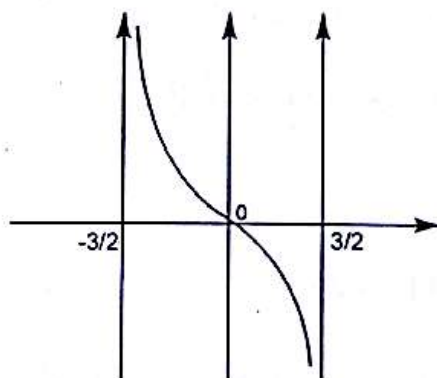
La cour de f' peut avoir la forme suivante



2) D'après la courbe f' est définie sur $\mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^-} f'(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f'(x) = -\infty$$

La fonction f' est impaire



EXERCICE 23

$$E = \{f \text{ définies sur } \mathbb{R} \text{ deux fois dérivables vérifiant } f'' + f = 0\}$$

1) a) Si f est la fonction nulle alors $f'' = f = 0$ d'où $f'' + f = 0$; si $f(x) = \cos x$ alors

$$f''(x) = -\cos x \text{ d'où } f''(x) + f(x) = 0$$

si $f(x) = \sin x$ alors $f''(x) = -\sin x$ d'où $f''(x) + f(x) = 0$

En conclusion les fonction nulle, cosinus et sinus appartiennent à E .

b) Si f et g appartiennent à E alors $f'' + f + g'' + g = (f + g)'' + (f + g) = 0$ ce qui prouve que $f + g \in E$. De même on vérifie que $\lambda f \in E$

Nous savons que les fonctions cosinus et sinus appartiennent à E donc la fonction f définie par $f(x) = a \cos x + b \sin x$ est élément de E .

2) a) Si $f \in E$ alors $f'' + f = 0$: $f^2 + f'^2$ est constante si $(f^2 + f'^2)' = 0$

$$\Rightarrow 2f'f + 2f''f' = 0 \Leftrightarrow 2f'(f'' + f) = 0 \text{ (vraie car } f \text{ est élément de } E)$$

N.B. : Une fonction est constante ssi sa dérivée est nulle

b) Si $f(0) = f'(0) = 0$ alors $f^2(0) + f'^2(0) = 0$ donc $f^2 + f'^2$ est constante et sa valeur est zéro, cela n'est possible que si $f = f' = 0$

3) Soit f une fonction de E et g définie par : $g(x) = f(x) - f(0)\cos x - f'(0)\sin x$.

a) D'après 1)-b) la somme de deux fonctions de E est une fonction de E donc $g = f - U$ avec $u(x) = \cos x + f'(0)\sin x$ est élément de E car elle est la somme de deux éléments de E .

$$b) g(0) = f(0) - f(0)\cos 0 - f'(0)\sin 0 = f(0) - f(0) = 0$$

$$g'(0) = f'(0) + f(0)\sin 0 - f'(0)\cos 0 = f'(0) - f'(0) = g'(0) = 0 \Rightarrow g \text{ Est la fonction nulle.}$$

c) Nous venons d'établir que si f est élément de E alors la fonction $g = f - u$ est la fonction nulle donc $f(x) - f(0)\cos x - f'(0)\sin x = 0$ ce qui implique que $f(x) = f(0)\cos x + f'(0)\sin x$ En posant $f(0) = a$ et $f'(0) = b$ on obtient pour toute fonction f et E $f(x) = a \cos x + b \sin x$.

EXERCICE 24

1) Calcul de primitive : F est une primitive de f

$$a) f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow F(x) = x - \tan x$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4 : \text{ en posant } u = 1 + \frac{1}{x} \text{ on aura } u' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{donc } g(x) = u' \cdot u^4 \text{ d'où une primitive de } g \text{ est } G = \frac{-1}{5} u^5$$

$$G(x) = -\frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5$$

$$\bullet u(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \sin x}} : \text{ En posant } V(x) = 2 + \sin x \text{ on aura } V'(x) = \cos x$$

$$\text{d'où } u(x) = \frac{V'(x)}{V(x)} \Rightarrow U(x) = 2\sqrt{V(x)}; \text{ une primitive de } u \text{ est } U(x) = 2\sqrt{2 + \sin x}$$

b) $f(x) = x \cos x + \sin x$ nous remarquons que $(x \sin x)' = \sin x + x \cos x$ d'où une primitive de f est $F(x) = x \sin x$

$$\bullet g(x) = x \cos x^2. \text{ Posant } u(x) = x^2 \text{ on aura } g(x) = x \cos(u(x)).$$

Nous savons que $(\sin(u(x)))' = u'(x) \cdot \cos(u(x))$ d'où $(\sin x^2)' = 2x \cos x^2$.

On en déduit que $(\sin(u(x)))' = u'(x) \cdot \cos(u(x))$ d'où $(\sin x^2)' = 2x \cos x^2$. On en déduit qu'une primitive de g est $G(x) = \frac{1}{2} \sin x^2$

• $u(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$; pour $x \neq 1$; une primitive de u est $U(x) = \frac{1}{3} \ln|x^3 - 1|$

2) Calcul d'intégrale

$$a) \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$b) \int_0^1 9x^2 \sqrt{1+x^3} dx = 3 \int_0^1 3x^2 \sqrt{1+x^3} dx = 3 \left[\frac{2}{3} (1+x^3) \sqrt{1+x^3} \right]_0^1 = [2(1+x^3) \sqrt{1+x^3}]_0^1 = 4\sqrt{2} - 2$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} dx : \text{ nous savons que } \sin 2x = 2 \sin x \cos x \text{ donc } \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x} = 2 \sin x \text{ d'où}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} dx = 2[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \left[\frac{1}{2} \sin^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

3) Intégration par parties

* $I = \int_0^1 x \sqrt{1+x} dx$: on pose $u = x$ donc $u' = 1$; $v' = \sqrt{1+x}$ donc $v = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{1+x}$: on obtient

$$I = \frac{2}{3} x(x+1)\sqrt{1+x} \text{ ce qui implique } I = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15} [(x+1)^2 \sqrt{1+x}]_0^1 \Leftrightarrow I = \frac{4\sqrt{2} + 4}{15}$$

* $J = \int_0^{\pi} (x-1) \cos x dx$: $u = x-1 \Rightarrow u' = 1$; $v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$

$$J = [(x-1) \sin x] + [\cos x]_0^{\pi} \Rightarrow J = -2$$

* $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x^2 \sin 3x dx = [-x^2 \cos 3x]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 3x dx = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left[\frac{x}{3} \sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{9} [\cos 3x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$\Rightarrow K = \frac{\pi^2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{\pi^2 + 2}{9}$$

* $L = \int_1^e x \ln x dx$: $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$; $v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$ d'où $L = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e -\frac{x}{2} dx \Leftrightarrow$

$$L = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e \Leftrightarrow L = \frac{e^2 + 1}{4}$$

* $M = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$: $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$; $v' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow v = \sqrt{1+x^2}$

$$\text{On trouve } M = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$$

* $N = \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx = \int_0^1 -\frac{x^2}{2} (-2x e^{-x^2}) dx$: $u = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow u' = -x$; $v' = -2x e^{-x^2} \Leftrightarrow v = e^{-x^2}$ d'où

$$N = \left[-\frac{x^2}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 -x e^{-x^2} dx \text{ on trouve } N = -\frac{1}{2e} - \left[\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 \text{ d'où } N = \frac{e-2}{2e}$$

EXERCICE 25

Résolution des systèmes par la méthode du point de GAUSS

$$1) \begin{cases} x + y + z + t = -1 \\ 3x - y + 2z - 5t = -26 \\ -x + z - 2t = -8 \\ 8x + 2y + t = 0 \end{cases}$$

La matrice complète de ce système est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -5 & \vdots & -26 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & \vdots & -8 \\ 8 & 2 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow 3L_1 - L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_1 + L_2 \\ L_4 &\leftarrow 8L_1 - L_4 \end{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 8 & \vdots & 28 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \vdots & -9 \\ 0 & 6 & 8 & 7 & \vdots & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \vdots & 23 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & \vdots & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -43 & \vdots & -86 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -43t = -86 \\ -7z + 2t = 59 \\ y + 2z - t = 23 \\ x + y + z + t = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ z = -5 \\ y = 35 \\ x = -33 \end{cases} \quad \text{d'où } S = \{(-33; 35; -5; 2)\}$$

$$2) \begin{cases} -2x + y - z - t = 3 \\ x - 2y + z - 2t = 7 \\ 3x + 2z + t = 5 \\ 2x - y + 2z - 2t = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & \vdots & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & \vdots & 5 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & \vdots & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & \vdots & 17 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & \vdots & 19 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 &\leftarrow 3L_1 + 2L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_1 + L_4 \end{aligned} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & \vdots & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & 18 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & \vdots & 36 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_4 \\ L_4 &\leftarrow L_2 + L_3 \end{aligned} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & \vdots & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & 18 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots & 18 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + y - z - t = 3 \\ 0 - 3y + z - 5t = 17 \\ 0 + 0 + z - 3t = 18 \\ 0 - 0 - z - 3t = 18 \end{cases} \quad \text{en posant } t = \alpha \text{ alors } z = 18 + 3\alpha; 3y = z - 5\alpha - 17$$

$$\Rightarrow 3y = 18 + 3\alpha - 5\alpha - 17 \quad y = \frac{1-2\alpha}{3}; \quad 2x = y - z - t - 3$$

$$2x = \frac{1-2\alpha-18}{3} - 3\alpha - \alpha - 3 \Rightarrow x = \frac{-62-14\alpha}{3}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{-62+14\alpha}{3}; \frac{1-2\alpha}{3}; 18+3\alpha; \alpha \right), \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

~ ENONCES ~

EXERCICE 1

Soit g la fonction définie par $g(x) = x - 2 - \ln(x-1)^2$

- 1) Calculer $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(5)$. On donne $\ln 2 = 0,7$; $\ln 3 = 1,1$. Etudier g et tracer sa courbe (\mathcal{C}) dans un repère orthonormé (unité 2 cm). Préciser les branches infinies.
- 2) Dédire de 1) que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement 3 racines dont on donnera les parties entières.

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 e^{-2x}$

- 1) Tracer sa courbe (\mathcal{C}) de f dans repère orthogonal ($o; \vec{i}; \vec{j}$).
- 2) Discuter graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation $x^2 e^{-2x} = m$ où m est un réel.

EXERCICE 3

On considère le polynôme P définie par : $P(x) = (x+a)(x+b)(x+c)$ où x est la variable réelle et a, b, c des réels en progression géométrique dans cet ordre.

- 1) Déterminer a, b et c sachant que dans le développement de $P(x)$ le réel -3 est le coefficient affecté à x^2 et $a.b.c = 8$.
- 2) Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivants :
 - a) $x e^{\ln(x^2+4)} + 2(x^2 - 5x + 4) = 5 \ln e^{x^2}$
 - b) $e^x - 3 - 6e^{-x} = -8e^{-2x}$

(Bac. SET 1993)

EXERCICE 4

- 1) A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t} \cos t \, dt$
- 2) Dédire de la question précédente la valeur des réels : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t} \cos t \, dt$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t} \sin^2 t \, dt$

EXERCICE 5

Soit la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$

- 1) Prouver que f est impaire
- 2) Etudier les variations de f et construire sa représentation graphique (\mathcal{C}) dans un repère orthonormé.
- 3) Montrer que f est une bijection de $] -2 ; 2[$ sur \mathbb{R} et déterminer sa fonction réciproque f^{-1} .

EXERCICE 6

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par :
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x(\ln x)^2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ (on pourra montrer la continuité en 0 en posant $x = u^2$, $u > 0$)

2) Calculer les limites, lorsque x tend vers $+\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$

3) Etudier le signe de la dérivée de f .

Quelle est l'équation de la tangente à la courbe (\mathcal{C}) représentative de f au point d'abscisse e ?

Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0.

Quelle est la demi-tangente à (\mathcal{C}) en 0 ?

4) Représenter (\mathcal{C}) dans un repère orthonormé.

5) Soit g la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x(\ln x - 1)$

Calculer la dérivée de g et en déduire les primitives de f .

6) Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la portion du plan comprise entre (\mathcal{C}) et les droites d'équations $x = \lambda$

$(0 < \lambda < 1)$; $x = 1$ et $y = 0$. Calculer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0.

(Bac. MTE 1995)

EXERCICE 7

1) Soit l'équation $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$. Vérifier que 1 est une racine de cette équation. Déterminer le nombre réel a tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x+1)(x^2 + ax - 10)$.

2) Déduire de la question précédente, les solutions de chacune des équations suivantes :

a) $(\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - 7(\ln x) + 10 = 0$

b) $e^{3x} - 4e^{2x} + 10 - 7e^x = 0$

c) $\sin^3 x - 4\sin^2 x - 7\sin x + 10 = 0$

(Bac. MTE.1985)

EXERCICE 8

Le plan affine euclidien E est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

Soit f_m la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f_m(x) = mx + e^x$ où m est un paramètre réel. On désigne par \mathcal{C}_m la courbe de f dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Montrer que toutes les courbes \mathcal{C}_m passent par un point fixe que l'on déterminera.

2) En discutant suivant les valeurs de m , étudier les variations de la fonction f_m .

3) On suppose $m > 0$

a) Montrer que f_m est une bijection

b) Montrer que f_m^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} , puis calculer son nombre dérivé au point 1.

4) On suppose $m = -1$ et on désigne par D l'asymptote à \mathcal{C}_1 ;

a) Tracer l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par la courbe \mathcal{C}_1 , D et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$ où λ est un réel négatif.

b) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$ quand λ tend vers $-\infty$

(Bac. MTI - MTGC.1993)

EXERCICE 9

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0$$

$$f(x) = x \ln x - 2x + 1 \text{ si } x > 0$$

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$
- 2) a) Calculer $f'(x)$ si $x > 0$
b) Etudier les variations de f sur I
- 3) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
c) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
- 4) Etudier **Erreur! Des objets ne peuvent pas être créés à partir des codes de champs de mise en forme.** Déduire le comportement asymptotique de (\mathcal{C}) courbe représentative de f .
- 5) a) Tracer (\mathcal{C}) dans un repère orthonomé
b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe (\mathcal{C}) en son point d'abscisse e^2
- 6) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \ln x - 1$. Déterminer la primitive de g qui prend la valeur (-1) pour $x = 1$ sur $[0; +\infty[$.

EXERCICE 10

On considère la fonction définie par : $f(x) = \ln(x^2 - x - 2)$, où \ln désigne le logarithme népérien.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f ; calculer les limites aux bornes de ce domaine et étudier les variations de f .
- 2) Soit (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$. Montrer que (\mathcal{C}) admet la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ pour centre de symétrie.
- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de (\mathcal{C}) avec l'axe des abscisses.
- 4) Calculer $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$ et $f(-2)$. En donner les valeurs approchées à 10^{-2} près à l'aide de la table suivante :

x	2	3	5
lnx	0,693	1,099	1,609

- 5) Construire (\mathcal{C}) dans $(o; \vec{i}; \vec{j})$ avec $i = j = 2 \text{ cm}$.

(Bac. MTE. 1995)

EXERCICE 11

- 1) f est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$. D est le domaine limité par la courbe (\mathcal{C}) de f , la droite des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. l'unité graphique est 3 cm.

- a) Représenter D .
- b) Calculer l'aire de D en cm^2 .

- 2) Pour tout naturel n on pose : $I_n = \int_1^e t^n e^t dt$

- a) A l'aide d'une intégration par partie, démontrer que pour tout n : $I_n = e - nI_{n-1}$
- b) Calculer I_0 puis I_1, I_2, I_3 .

EXERCICE 12

- 1) Vérifier l'égalité $\log_a x \cdot \log_a x = \frac{1}{2}(\log_a x)^2$. En déduire les solutions de l'équation :
 $\log_a x \cdot \log_a x = 2$
- 2) Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système suivant où l'inconnue est le couple (x, y) :
- $$\begin{cases} 2 \log_x y + 2 \log_y x = -5 \\ xy = e \end{cases}$$

(SET Compo 1983)

EXERCICE 13

- 1) Etudier la limite en zéro de $f: x \mapsto f(x) = \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 2x}$
- 2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 3$
- 3) Pour quelle valeur de x la fonction f s'annule-t-elle ?

(SET Compo 1981)

EXERCICE 14

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = xe^{1-x^2}$ si $x \leq 1$ et $f(x) = ax^2 + bx$ si $x > 1$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- 1) Déterminer a et b pour que f soit continue et dérivable en 1.
- 2) Etudier les variations de f et construire sa représentation graphique dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
- 3) On désigne par D l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) sont telles que $0 < x < \frac{3}{2}$ et $0 \leq y \leq f(x)$. Calculer l'aire de D .

EXERCICE 15

Soit la fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1}$

- 1) Donner l'ensemble de définition de f et calculer sa fonction dérivée.
- 2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 3$.
- 3) Pour quelle valeur de x la fonction s'annule-t-elle ?

EXERCICE 16

On considère la fonction numérique de f de la variable réelle x définie par $f(x) = (x+2)(1+e^{-x})$

- 1) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe (\mathcal{C}) de f .
- 2) a) Calculer $f'(x)$
 b) Dresser le tableau de variation de f' et celui de f .
- 3) Construire (\mathcal{C}) dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique 1 cm.
- 4) Evaluer en cm^2 l'aire $A(\alpha)$ du domaine plan limité par (\mathcal{C}) , la droite (D) et les droites d'équations $x = -2$ et $y = \alpha$ avec $\alpha > -2$
- 5) a) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

- b) Représenter f' dans le même repère que (\mathcal{C}) .
 c) Soit I le point de la courbe (Γ) de f' d'abscisse 4. Etablir l'équation de la tangente à (Γ) en I. Tracer cette tangente.

(Bac. SBT 95)

EXERCICE 17

- I - 1) Déterminer la solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ qui prend la valeur $\frac{1}{4}$ au point 0.
 2) Soit la fonction définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{4}e^{-2x}$. Construire la courbe représentative (\mathcal{C}) de f le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).
 3) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur un sous-ensemble de \mathbb{R} que l'on précisera. Soit f' la bijection réciproque de f ; donner son tableau de variation et construire sa courbe représentative (\mathcal{C}') dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
 4) Déterminer l'expression de $f'(x)$ et calculer l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = \frac{1}{4}$; $x = \frac{e}{4}$; $y = 0$ et (\mathcal{C}') .

II - 1) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r et (V_n) la suite numérique définie par : $V_n = f(U_n)$ pour tout entier naturel n .

- a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera en fonction de r , sa raison q .
 b) Discuter suivant les valeurs de r , la limite de la suite (V_n) .
 c) Calculer en fonction de U_0 , r et n la somme $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ et la limite de la suite (S_n) .
 2) Calculer la limite de la suite (F_n) définie par : $F_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3) Soit (W_n) suite définie par : $W_n = \int_0^n f(x) dx$

Exprimer W_n en fonction de n et montrer que (W_n) converge vers une limite que l'on précisera.

(Bac. MTE 96)

EXERCICE 18

I - Résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes suivant :

$$\begin{cases} \log_x e + \log_y e = \frac{7}{3} \\ \ln xy = \frac{7}{2} \end{cases}$$

II Soit la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{\tan x}$

1) Etudier le signe de $f(x)$ sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ et calculer le réel $I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$. Interpréter I_1 comme l'aire d'un domaine à préciser.

2) Soit g la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ par $g(x) = -f(x)$. Calculer $g'(x)$ et en déduire $I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 x}$

(Bac MTE 96)

EXERCICE 19 (Equation différentielle)

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à un instant, exprimé en heures peut être considéré comme une fonction y à valeurs réelles de la variable réelle t . La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée y' de cette fonction.

On a constaté que : $y'(t) = k \cdot y(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

1) Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$.

2) Sachant qu'au bout de 2 heures, le nombre de microbes a quadruplé, calculer en fonction de N , le nombre de microbes au bout de 3 heures.

3) Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de cinq heures.

EXERCICE 20

Soit la suite (U_n) définie par $U_n = \int_{n-1}^n e^{-\frac{1}{x}} dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

- 1) Calculer U_n en fonction de n .
- 2) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- 3) On appelle S_n la somme des n premiers termes de la suite (U_n) . Montrer que $S_n = \int_{n-1}^n e^{-\frac{1}{x}} dx$
- 4) La suite (S_n) a-t-elle une limite quand n tend vers $+\infty$

EXERCICE 21

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(1+x)$. On note (\mathcal{C}) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 3 cm.

- 1) a) Etudier le sens de variation de f .
b) Donner une équation de la tangente (Δ) à la courbe (\mathcal{C}) en son point d'abscisse 0.
c) Construire (\mathcal{C}) et (Δ) .
- 2) En étudiant la fonction numérique g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x - f(x)$, démontrer que l'équation $x = f(x)$ a une solution unique $\alpha \in [2; 3]$.

(D'après Bac SET 1997)

~ SOLUTIONS ~

EXERCICE 1

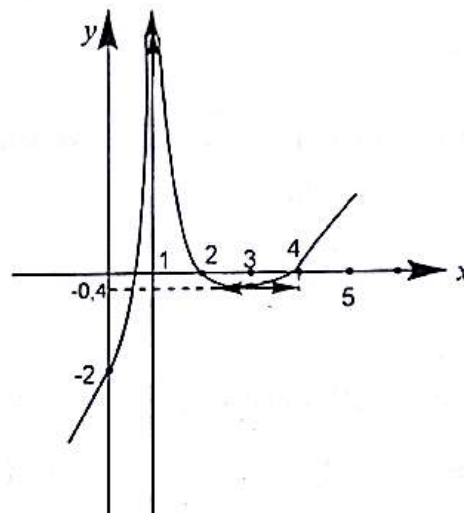
1) $g(x) = x - 2 - \ln(x-1)^2$. $g(0) = -2$; $g(2) = 0$; $g(4) = -0,2$; $g(5) = 0,2$. $Dg = \mathbb{R} - \{1\}$.

La fonction g est continue sur Dg ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$

La courbe de g admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$ car $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = 1$. La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe de g ;

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x-1} = \frac{x-3}{x-1} \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		+		-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$		$+\infty$		-0,4		$+\infty$



2) D'après la représentation graphique nous voyons que la courbe coupe l'axe (ox) en trois points x_1, x_2, x_3 qui sont telles que $0 < x_1 < 1$, $x_2 = 2$ et $4 < x_3 < 5$. D'où $E(x_1) = 0$; $E(x_2) = 2$ et $E(x_3) = 4$
N.B. : $E(x)$ désigne la partie entière de x .

EXERCICE 2

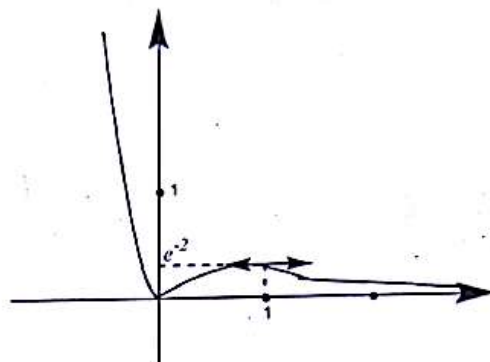
Soit la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 e^{-2x}$

1) $D_f = \mathbb{R}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe (\mathcal{C}) de f .

$$f'(x) = 2x e^{-2x} (1 - x)$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	0	e^{-2}	0	



2) Graphiquement nous avons les résultats suivants :

- Si $m < 0$ alors l'équation $x^2 e^{-2x} = m$ n'a pas de solution réelle
- Si $m = 0$ alors admet une seule racine qui est égale à 0
- Si $m \in]0; e^{-2}]$ l'équation admet 3 racines x_1, x_2, x_3 vérifiant $x_1 < 0 < x_2 \leq x_3$
- Si $m > e^{-2}$ l'équation admet une seule solution négative.

EXERCICE 3

$P(x) = (x+a)(x+b)(x+c)$; a, b et c en progression géométrique.

1) $b^2 = ac$. $P(x) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$.

D'après les l'hypothèses nous avons
$$\begin{cases} a+b+c = -3 \\ abc = 8 \\ b^2 = ac \end{cases}$$

$b^2 = ac \Rightarrow abc = b^3$ d'où $abc = 8 \Leftrightarrow b^3 = 8 \Rightarrow b = 2$. Ainsi le système devient :

$$\begin{cases} a+c = -5 \\ ac = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1 \text{ et } c = -4 \text{ d'où } P(x) = (x-1)(x+2)(x-4) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8.$$

2) Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

a) $x e^{\ln(x^2+4)} + 2(x^2 - 5x + 4) = 5 \ln e^{x^3} \Leftrightarrow x(x^2+4) + 2x^2 - 10x + 8 = 5x^2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$
 $(x-1)(x+2)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = 4$

b) $e^x - 3 - 6e^{-x} = -8e^{-2x} \Leftrightarrow e^x - 3 - \frac{6}{e^x} + \frac{8}{e^{2x}} = 0$

$e^{3x} - 3e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$. En posant $X = e^x$ avec $X > 0$ on trouve $X^3 - 3X^2 - 6X + 8 = 0$. Les valeurs de X sont donc $X = 1$ ou $X = 4$ (la valeur -2 ne convient pas).

$X = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $X = 4 \Leftrightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$. D'où $S = \{0, \ln 4\}$.

EXERCICE 4

1) Posons $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cos 2t \, dt$. Calculons A à l'aide de deux intégrations par parties en posant $u = e^{-2t}$

alors $u' = -2e^{-2t}$; $v' = \cos 2t \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2t$ donc $A = \left[\frac{1}{2} e^{-2t} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t} \sin 2t \, dt$:

$v' = \sin 2t \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2t$ d'où $A = \left[\frac{1}{2} e^{-2t} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{2} e^{-2t} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t} \cos 2t \, dt$

$$2A = \frac{1}{2} \left[\left(e^{-2t} \sin 2t - e^{-2t} \cos 2t \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow 2A = \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1) \Leftrightarrow A = \frac{1}{4} (e^{-\pi} + 1)$$

$$2) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t} \cos^2 t \, dt \quad ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t} \sin^2 t \, dt$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t} (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t} \, dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I + J = -\frac{1}{2} e^{-\pi} + \frac{1}{2}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t} (\cos^2 t - \sin^2 t) \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2t} \cos 2t \, dt = \frac{1}{4} (e^{-\pi} + 1) \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} I + J = -\frac{1}{2} e^{-\pi} + \frac{1}{2} \\ I - J = \frac{1}{4} (e^{-\pi} + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = \frac{1}{8} (-e^{-\pi} + 3) \\ J = \frac{1}{8} (-3e^{-\pi} + 1) \end{cases}$$

EXERCICE 5

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = \ln \left(\frac{2+x}{2-x} \right)$$

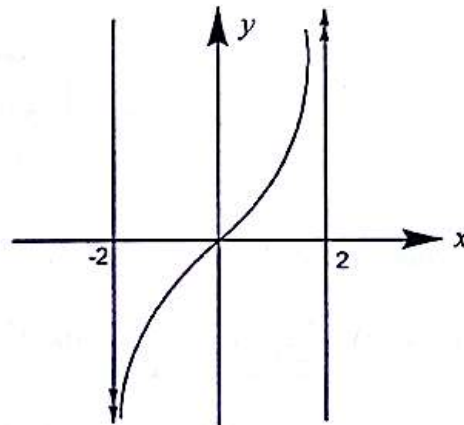
$$1) \quad D_f =]-2; 2[; \forall x \in D_f, -x \in D_f \text{ et } f(-x) = \ln \left(\frac{2-x}{2+x} \right) = -\ln \left(\frac{2+x}{2-x} \right)$$

D'où $f(-x) = -f(x)$. f est donc impaire

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty. \text{ Les droites d'équations } x = -2 \text{ et } x = 2 \text{ sont des asymptotes}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} = \frac{4}{(2+x)(2-x)} > 0 \text{ d'où } f \text{ est strictement croissant sur } D_f$$

x	-2	2
$f(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



3) f est continue et strictement croissante sur $]-2; 2[$ à valeur dans \mathbb{R} d'où elle réalise une bijection de $]-2; 2[$ sur \mathbb{R}

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = \ln \left(\frac{2+x}{2-x} \right) \Leftrightarrow e^y = \frac{2+x}{2-x} \Leftrightarrow 2e^y - xe^y = 2+x \Leftrightarrow x(1+e^y) = 2(e^y - 1) \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{2(e^y - 1)}{e^y + 1} \text{ d'où } f^{-1}(y) = \frac{2(e^y - 1)}{e^y + 1}$$

EXERCICE 6

f est la fonction numérique définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x(\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0 = f(0)$ d'où f est continue sur \mathbb{R}^+

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

3) $f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x \Leftrightarrow f'(x) = \ln x(\ln x + 2)$
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^{-2}$

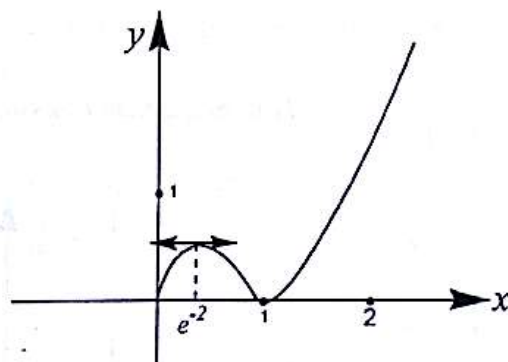
x	0	e^{-2}	1	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

$f(e) = e$; $f'(e) = 3$ l'équation de la tangente (C) au point d'abscisse e est
 $y = 3(x - e) + e \Leftrightarrow y = 3x - 2e$

Nous savons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$ d'où f n'est pas dérivable à droite au point $x = 0$.

L'équation de la demi-tangente à (C) en 0 est $x = 0$

4) La courbe de f



5) g est la fonction numérique définie par $g(x) = \frac{x^2}{2} \ln x(\ln x - 1)$

$$g'(x) = x \ln x(\ln x - 1) + \frac{x^2}{2} \left[\frac{2}{x} \ln x - \frac{1}{x} \right] = x(\ln x)^2 - \frac{x}{2} \text{ d'où}$$

$$g'(x) = f(x) - \frac{x}{2} \Leftrightarrow f(x) = g'(x) + \frac{x}{2} \Leftrightarrow f(x) = \left(g(x) + \frac{x^2}{4} \right) \text{ une primitive de } f \text{ est donc}$$

$$g(x) + \frac{x^2}{4} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x(\ln x - 1)$$

6) $A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx = [F(x)]_{\lambda}^1 \Rightarrow A(\lambda) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lambda^2 \ln(\ln \lambda - 1) - \frac{\lambda^2}{4}$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A(\lambda) = \frac{1}{4}$$

EXERCICE 7

1) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$. La somme des coefficients de cette équation est égale à 0 d'où 1 est une solution. $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x-1)(x^2 + ax - 10) \Leftrightarrow a = -3$.

On en déduit $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x-1)(x^2 - 3x - 10)$

2) a) $(\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - 7(\ln x) + 10 = (\ln x - 1)((\ln x)^2 - 3\ln x - 10) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$ ou

$(\ln x)^2 - 3\ln x - 10 = 0 : \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

$(\ln x)^2 - 3\ln x - 10 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 5$ ou $\ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^5$ ou $x = e^{-2}$

$$S = \{e, e^5, e^{-2}\}$$

b) $e^{3x} - 4e^{2x} - 7e^x - 10 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$ ou $e^x = 5 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln 5$

$$S = \{0; \ln 5\}$$

c) $\sin^3 x - 4\sin^2 x - 7\sin x - 10 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

EXERCICE 8

$$f_m(x) = mx + e^x$$

1) a) $\forall m \in \mathbb{R}, f_m(0) = 1$ d'où toutes les courbes (\mathcal{C}_m) passent par le point de coordonnées $(0; 1)$

2) $f'_m(x) = m + e^x$

• Si $m \geq 0$ alors $f'_m(x) > 0$ pour tout m réel ; dans ce cas f_m est strictement croissante sur \mathbb{R}

• Si $m < 0$ alors $f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = -m \Leftrightarrow x = \log(-m)$ et nous avons le tableau de variation

suivant: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'_m(x)$		- 0 +	
$f_m(x)$	$+\infty$	$f_m(x_0)$	$+\infty$

N.B Dans le tableau $x_0 = \log(-m)$ et $f_m(x_0) = m[\log(-m) - 1]$

2) $m \geq 0$

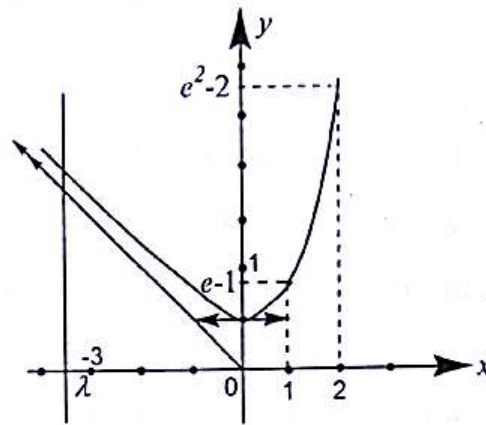
a) Nous savons que si $m \geq 0$ alors f_m est strictement croissante sur \mathbb{R} donc elle définit une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}

b) Pour $m > 0$, $f'_m(x)$ ne s'annule pas d'où f_m est dérivable sur \mathbb{R} et $(f'_m)(x) = \frac{1}{f'_m[f^{-1}(x)]}$

$$\text{D'où } f_m^{-1}(1) = \frac{1}{f'_m[f_m^{-1}(1)]} = \frac{1}{f'_m(0)} = \frac{1}{m+1} \text{ car } f_m^{-1}(1) = 0$$

3) Si $m = -1$ alors $f_{-1}(x) = -x + e^x$; la droite D d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à (\mathcal{C}_{-1}) .

a)



$$b) A(\lambda) = \int_{\lambda}^0 (f_{-1}(x) + x) dx \Leftrightarrow A(\lambda) = \int_{\lambda}^0 e^x dx = 1 - e^{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = 1 \text{ u.a. } = 4 \text{ cm}^2$$

EXERCICE 9

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = x \ln x - 2x + 1 \text{ si } x > 0 \end{cases} \text{ et } I = [0; +\infty[$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \text{ donc } f \text{ est continue au point } x_0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x - 2) = -\infty \text{ d'où } f \text{ n'est pas dérivable au point } x_0 = 0.$$

$$2) a) \text{ Si } x > 0, f'(x) = \ln x - 1$$

$$c) f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e: f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > e$$

Le tableau de variation de f :

x	0	e	$+\infty$		
$f'(x)$ <td></td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td>		-	0	+	
$f(x)$ <td>1</td> <td>\searrow</td> <td>$1 - e$</td> <td>\nearrow</td> <td>$+\infty$</td>	1	\searrow	$1 - e$	\nearrow	$+\infty$

$$3) a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$$

b) D'après le tableau de variation de f l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans I .

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty. \text{ La courbe } (\mathcal{C}) \text{ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées}$$

$$5) b) f(e^2) = 1; f'(e^2) = 1 \text{ d'où l'équation de la tangente à } (\mathcal{C}) \text{ au point d'abscisse } e^2 \text{ est}$$

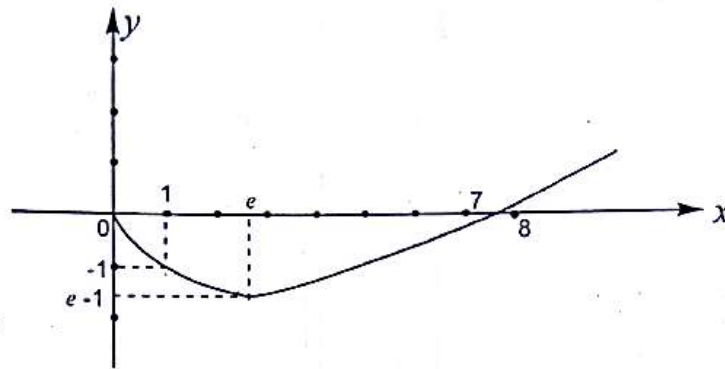
$$y = x - e^2 + 1$$

$$6) g(x) = \ln x - 1. \text{ Nous savons que } f'(x) = \ln x - 1 \text{ d'où } f(x) + k \text{ est une primitive de } g. \text{ La primitive } F \text{ de } f \text{ telle que } F(1) = -1 \text{ est définie par } f(1) + k = -1 \Leftrightarrow -1 + k = -1 \Leftrightarrow k = 0 \text{ d'où}$$

$$F(x) = f(x) = x \ln x - 2x + 1.$$

La primitive de g qui prend la valeur (-1) pour $x = 1$ est la fonction f .

5) a)



EXERCICE 10

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = \ln(x^2 - x - 2)$$

1) f est définie ssi $x^2 - x - 2 \neq 0$ c'est à dire $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 2\}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-2} ; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Les variations de f sont résumées dans le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$	-1	$1/2$	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	\parallel	$+$	0	$-$	\parallel	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	\nearrow	$\ln(9/4)$	\searrow	$-\infty$	$+\infty$

2) La droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (\mathcal{C}) ssi $f(1-x) = f(x)$;

$f(1-x) = \ln((1-x)^2 - (1-x) - 2) = \ln(x^2 - x - 2) = f(x)$ d'où $x = \frac{1}{2}$ est l'équation de l'axe de symétrie de (\mathcal{C}) .

$$3) f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow |x^2 - x - 2| = 1$$

$$x^2 - x - 2 = 1 \text{ ou } x^2 - x - 2 = -1$$

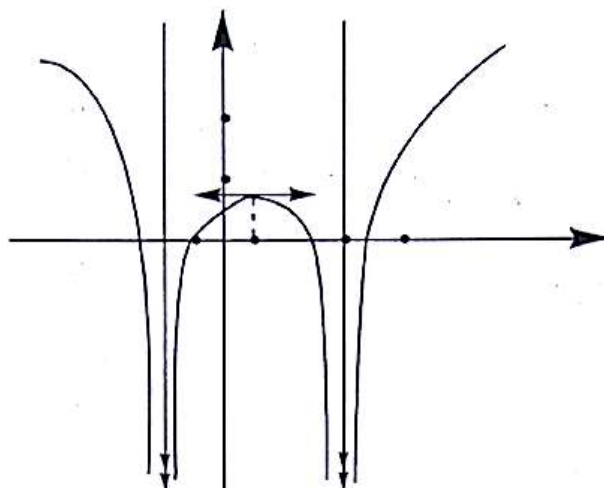
$$x^2 - x - 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0 \quad x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_4 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Les abscisses des points d'intersection de (\mathcal{C}) avec l'axe des abscisses sont :

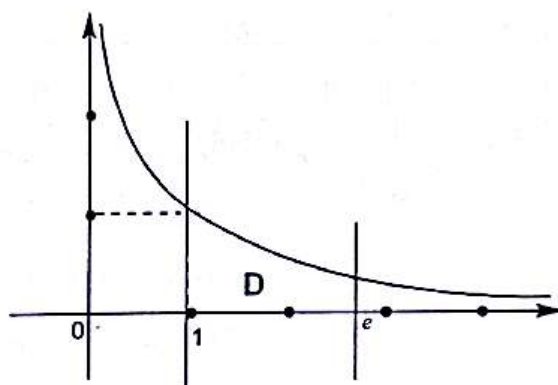
$$x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} ; x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} ; x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} ; x_4 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$4) f(0) = \ln 2 = 0,698 ; f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{9}{4} = 2 \ln 3 - 2 \ln 2 = 0,81 ; f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,223$$



EXERCICE 11

- 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$. D le domaine limité par la courbe (\mathcal{C}) de f , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$
 a) La tracé de la courbe



L'aire de D est $S = \int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^e = 1 \quad \text{ua} = 9\text{cm}^2$

2) $I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$

a) Posons $u = t^n \Rightarrow u' = nt^{n-1}$; $v' = e^t \Rightarrow v = e^t$ d'où

$$I_n = [t^n e^t]_0^1 - n \int_0^1 t^{n-1} e^t dt \Leftrightarrow I_n = e - nI_{n-1} \quad (C \text{ Q F D}).$$

b) $I_0 = \int_0^1 dt = 1$; $I_1 = e - 1$; $I_2 = 2 - e$; $I_3 = 4e - 6$

EXERCICE 12

$$1) \log_a x \cdot \log_{a^2} x = \frac{\ln x}{\ln a} \times \frac{\ln x}{\ln a^2} = \frac{\ln x}{\ln a} \times \frac{\ln x}{2 \ln a} = \frac{(\ln x)^2}{2(\ln a)^2} = \frac{1}{2} (\log_a x)^2$$

$$\log_3 x \cdot \log_9 x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\log_3 x)^2 = 2 \Leftrightarrow (\log_3 x)^2 = 4$$

$$\log_3 x = 2 \text{ ou } \log_3 x = -2 \Leftrightarrow x = 9 \text{ ou } x = \frac{1}{9}$$

$$2) \begin{cases} 2 \log_x y + 2 \log_y x = -5 \\ xy = e \end{cases} \quad \text{Nous pensons } \log_x y = X \text{ alors } \log_x y = \frac{1}{X} \text{ et}$$

$$2 \log_x y + 2 \log_y x = -5 \Leftrightarrow 2X + \frac{2}{X} = -5 \Leftrightarrow 2X^2 + 5X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = -2 \text{ ou } X = -\frac{1}{2}$$

• Si $X = -2$ alors le système devient

$$\begin{cases} \log_y x = -2 \\ xy = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = -2 \ln y \\ xy = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \ln y^{-2} \\ xy = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{y^2} \\ \frac{1}{y} = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{e} \\ x = e^2 \end{cases}$$

• Si $X = -\frac{1}{2}$ alors $\begin{cases} \ln x = \frac{1}{2} \ln y \\ xy = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{y}} \\ \sqrt{y} = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^2 \\ x = \frac{1}{e} \end{cases}$

L'ensemble des solutions du système est donc : $S = \left\{ \left(e^2, \frac{1}{e} \right); \left(\frac{1}{e}, e^2 \right) \right\}$

EXERCICE 13

$$1) f(x) = \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 2x}. \text{ Nous savons que pour } x \rightarrow 0; \sin x \rightarrow x \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \frac{1}{2}$$

$$2) \text{ La résolution dans } \mathbb{R} \text{ de } \ln x + \ln(x+1) = \ln 6 : x > 0$$

$$\ln x + \ln(x+1) = \ln 6 \Leftrightarrow x(1+x) = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \text{ d'où } x = 2$$

EXERCICE 14

$$f(x) = xe^{1-x^2} \text{ si } x \leq 1$$

$$f(x) = ax^2 + bx \text{ si } x > 1 \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}$$

$$1) f(1) = 1; \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = a + b : f \text{ continue en 1 ssi } a + b = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xe^{1-x^2} - 1}{x - 1}. \text{ Posons } x - 1 = h \text{ alors } x = 1 + h \text{ et } x \rightarrow 1 \Leftrightarrow h \rightarrow 0 \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xe^{1-x^2} - 1}{x - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)e^{-h(2+h)} - 1}{h}. \text{ Nous savons que : pour } x \rightarrow 1, h \rightarrow 0, e^{-h(2+h)} \rightarrow e^{-2h} \text{ et}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)e^{-h(1+h)} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[e^{-2h} + \frac{e^{-2h} - 1}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[e^{-2h} + 2 \frac{e^{-2h} - 1}{2h} \right] = 1 - 2 = -1 \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax^2 + bx - 1}{x - 1} \quad \text{puisque } a + b = 1 \text{ alors } \frac{ax^2 + bx - 1}{x - 1} = ax + a + b \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + a + b) = 2a + b$$

$$\text{En résumé nous avons } \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

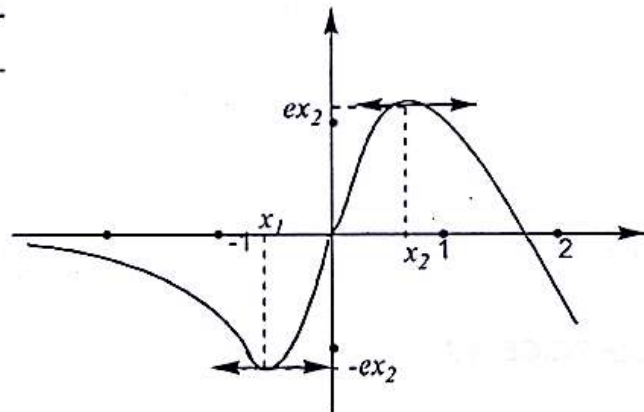
$$\text{et } f \text{ est donc définie par : } \begin{cases} f(x) = x \cdot e^{1-x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = -2x^2 + 3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$2) D_f = \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\text{Pour } x \leq 1 \quad f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2} : f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Si } x > 1 \quad f(x) = -2x^2 + 3x \Leftrightarrow f'(x) = -4x + 3 ; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \in]1, +\infty[$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	0	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$-\infty$	



L'aire de D est

$$S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x e^{1-x^2} dx + \int_1^2 (-2x^2 + 3x) dx = -\frac{1}{2} \left[e^{1-x^2} \right]_0^1 + \left[-\frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 \right]_1^2 = \frac{e-1}{2} + \frac{7}{24}$$

$$S = \frac{12e-5}{24}$$

EXERCICE 15

$$f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1}$$

$$1) f \text{ est définie ssi } x > 0 \text{ et } \ln x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq e \text{ d'où } D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[.$$

$$f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)^2}$$

$$2) f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} = 3 \Leftrightarrow \ln x - 2 = 3 \ln x - 3 \Leftrightarrow 2 \ln x = 1 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$3) f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

EXERCICE 16

$$f(x) = (x+2)(1+e^{-x}) = x+2 + (x+2)e^{-x}$$

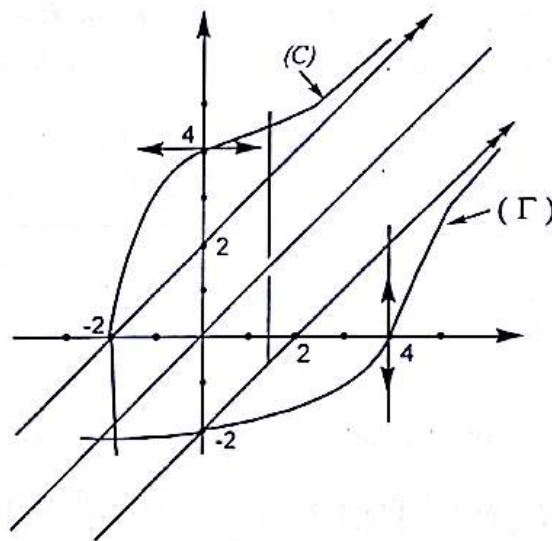
$$1) f(x) - (x+2) = (x+2)e^{-x}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{-x} = 0$ d'où la droite (D) d'équation $y = x+2$ est une asymptote à (\mathcal{C}) .

$$2) a) f'(x) = 1 + e^{-x} - (x+2)e^{-x} = 1 - (x+1)e^{-x}$$

$$b) f''(x) = (x+1)e^{-x} - e^{-x} = xe^{-x} : f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$+\infty$	0	1
x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$



4) L'aire $A(\alpha)$ du domaine limité par (\mathcal{C}) , (D) et les droites d'équations $x = -2$ et $x = \alpha$ est :

$$\int_{-2}^{\alpha} (f(x) - (x+2)) dx = \int_{-2}^{\alpha} (x+2)e^{-x} dx = \left[-(x+2)e^{-x} \right]_{-2}^{\alpha} - \left[e^{-x} \right]_{-2}^{\alpha} = -(\alpha+3)e^{-\alpha} + e^2$$

5) a) D'après l'étude des variations nous savons que f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} vers \mathbb{R} d'où f définit une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}

b) (Voir la représentation graphique)

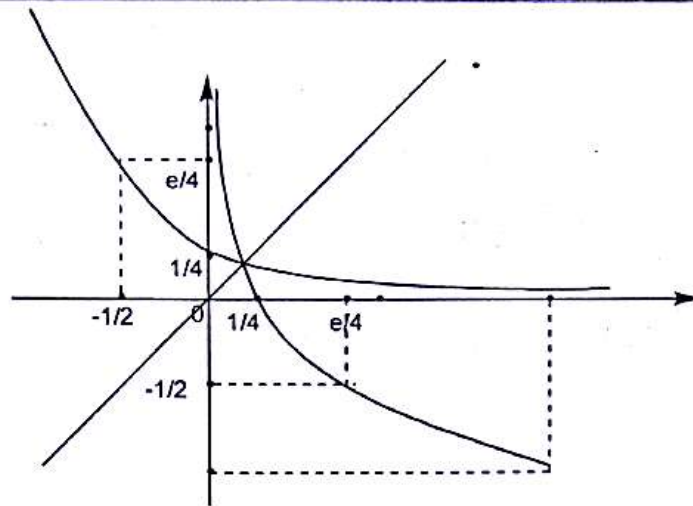
c) $I(4, 0)$ un point de la courbe (Γ) de f^{-1} . Nous savons que $f^{-1}(4) = 0$ et $f'(0) = 0$ d'où $(f^{-1})'$ n'est pas définie au point vertical à (Γ) en ce point I est verticale et son équation est $x = 4$.

EXERCICE 17

I. 1) La solution générale de l'équation $y' + 2y = 0$ est $y = ke^{-2x}$; celle qui prend la valeur $\frac{1}{4}$ au point 0 est définie par $f(0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$ d'où $f(x) = \frac{1}{4}e^{-2x}$

$$2) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{1}{4}e^{-2x} ; f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$



3) f est continue et strictement décroissante de \mathbb{R} vers $]0; +\infty[$ donc elle réalise une bijection de \mathbb{R} vers $]0; +\infty[$. le tableau de variation de f^{-1} est le suivant :

x	0	$+\infty$
f^{-1}		
$(f^{-1})'$	$+\infty$	$-\infty$

$$4) f(x) = \frac{1}{4}e^{-2x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}e^{-2x} \Leftrightarrow 4y = e^{-2x} \Leftrightarrow \ln(4y) = -2x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\ln(4y) \text{ d'où } f(x) = -\frac{1}{2}\ln(4x)$$

L'aire de portion du plan limité par (\mathcal{C}) , les droites d'équation $x = \frac{1}{4}$; $x = \frac{e}{4}$ et $y = 0$ est

$$S = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{e}{4}} f^{-1}(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{e}{4}} \ln(4x) dx = \frac{1}{2} \left([x \ln(4x)]_{\frac{1}{4}}^{\frac{e}{4}} - [x]_{\frac{1}{4}}^{\frac{e}{4}} \right) \quad S = \frac{1}{8} u.a = 2 \text{ cm}^2$$

II. 1) (U_n) une suite arithmétique de raison r , (V_n) la suite définie par $V_n = f(U_n)$

$$a) V_n = \frac{1}{4}e^{-2U_n}; V_{n+1} = \frac{1}{4}e^{-2U_{n+1}}; U_{n+1} = U_n + r \Leftrightarrow V_{n+1} = \frac{1}{4}e^{-2(U_n+r)} \Leftrightarrow V_{n+1} = \frac{1}{4}e^{-2r} \times e^{-2U_n} \Leftrightarrow V_{n+1} = e^{-2r} \cdot V_n \text{ d'où } (V_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = e^{-2r}$$

$$b) - \text{ Si } r = 0 \text{ alors } q = 1 \text{ et } (V_n) \text{ est stationnaire, sa limite est dans ce cas } V_0 = \frac{1}{4}e^{-2U_0}$$

$$- \text{ Si } r > 0 \text{ alors } q = e^{-2r} < 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

$$- \text{ Si } r < 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$$

$$c) S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n = \frac{V_0(1 - q^{n+1})}{1 - q} = \frac{\frac{1}{4}e^{-2U_0}(1 - e^{-2(n+1)r})}{1 - e^{-2r}} \text{ pour } r \neq 0$$

$$- \text{ Si } r = 0 \text{ alors } S_n = (n+1)V_0 = \frac{1}{4}(n+1)e^{-2U_0}$$

$$- \text{ Pour } r > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e^{-2U_0}}{4(1 - e^{-2r})}$$

- Si $r \leq 0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$

2) (F_n) la suite définie par $F_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n) = \frac{1}{4} + \frac{e^{-2}}{4} + \dots + \frac{e^{-2n}}{4}$

$$F_n = \frac{1}{4} \left[\frac{1 - e^{-2(n+1)}}{1 - e^{-2}} \right] ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = \frac{1}{4(1 - e^{-2})}$$

3) $W_n = \int_0^n f(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^n e^{-2x} dx = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^n = -\frac{1}{8} (e^{-2n} - 1)$

$$W_n = \frac{1}{8} (1 - e^{-2n}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \frac{1}{8} \text{ d'où } (W_n) \text{ converge vers } \frac{1}{8}$$

EXERCICE 18

- EXO 1

Résoudre dans \mathbb{R}^2
$$\begin{cases} \log_x e + \log_y e = \frac{7}{3} \\ \ln(xy) = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Le système est équivalent à
$$\begin{cases} \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln y} = \frac{7}{3} \\ \ln x - \ln y = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln x + \ln y}{\ln x - \ln y} = \frac{-7}{3} \\ \ln x + \ln y = \frac{-7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln + \ln y = \frac{7}{2} \\ \ln x \cdot \ln y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

d'où $\ln x$ et $\ln y$ sont les solutions de $X^2 - \frac{7}{2}X + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 7X + 3 = 0$; $X = \frac{1}{2}$ ou $X = 3$

Si $\ln x = \frac{1}{2}$ et $\ln y = 3$ alors $x = e^{\frac{1}{2}}$ et $y = e^3$; nous avons aussi $x = e^3$ et $y = e^{\frac{1}{2}}$ d'où l'ensemble

des solutions du système est : $S = \{(e^{\frac{1}{2}}; e^3); (e^3, e^{\frac{1}{2}})\}$

- EXO 2

$f: \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{1}{\tan x}$

a) $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ $\tan x > 0$ d'où $f(x)$ est positive sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$; $I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = [\ln(\sin x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$$I_1 = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \ln \sqrt{3}$$

I_1 est l'aire du domaine limité par la courbe de f , les droites d'équations $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$ et l'axe des abscisses.

2) $g: \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = -f(x) - x$

$$g'(x) = -f'(x) - 1 = \frac{\tan' x}{\tan^2 x} - 1 = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x} - 1 \Leftrightarrow g'(x) = \frac{1}{\tan^2 x}$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 x} dx = [g(x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = g\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}$$

EXERCICE 19

$y' = ky \Leftrightarrow y'(t) = ky(t) ; k > 0$. N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$

1) $y' = ky \Leftrightarrow y = Ae^{kt} : y(0) = N \Leftrightarrow A = N$ d'où l'unique solution vérifiant $y(0) = N$ est $y(t) = N.e^{kt}$.

2) Si $t = 2$ alors $y = 4N \Leftrightarrow 4N = N.e^{2k} \Leftrightarrow e^{2k} = 4 \Leftrightarrow k = \ln 2$. D'où $y(t) = N.e^{t \ln 2}$.
Ainsi $y(3) = N.e^{3 \ln 2} = N.2^3 \Leftrightarrow y(3) = 8.N$

3) $y(5) = 6400$ alors $6400 = N.e^{5 \ln 2} \Leftrightarrow 6400 = 2^5.N \Rightarrow N = \frac{6400}{32} = 200$.

Donc à l'instant $t = 0$ il y avait dans la culture 200 microbes

EXERCICE 20

$U_n = \int_{n-1}^n e^{-\frac{1}{2}x} dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$1) U_n = -2 \left[e^{-\frac{1}{2}x} \right]_{n-1}^n = -2 \left[e^{-\frac{1}{2}n} - e^{-\frac{1}{2}(n-1)} \right] = -2e^{-\frac{1}{2}n} (1 - e^{\frac{1}{2}})$$

2) $U_{n+1} = -2e^{-\frac{1}{2}(n+1)} (1 - \sqrt{e}) = e^{-\frac{1}{2}} \left[-2e^{-\frac{1}{2}n} (1 - \sqrt{e}) \right] = e^{-\frac{1}{2}} . U_n$. D'où (U_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{-\frac{1}{2}}$.

Le premier terme est : $U_1 = -2 \left(e^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \Leftrightarrow U_1 = 2 - 2e^{-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{e}}$

$$3) S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} dx + \int_1^2 e^{-\frac{1}{2}x} dx + \int_2^3 e^{-\frac{1}{2}x} dx + \dots + \int_{n-1}^n e^{-\frac{1}{2}x} dx = \int_0^n e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

$$4) S_n = \int_0^n e^{-\frac{1}{2}x} dx = -2 \left[e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^n = -2 \left[e^{-\frac{1}{2}n} - 1 \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$$

EXERCICE 21

f fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(1+x)$

1) a) Etude du sens de variation de f :

f est dérivable sur $[0, +\infty[$

$$\text{Pour tout } x \in [0, +\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0$$

La fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

b) Equation de la tangente (Δ) à la courbe de f au point d'abscisse 0 :

Elle est définie par $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$

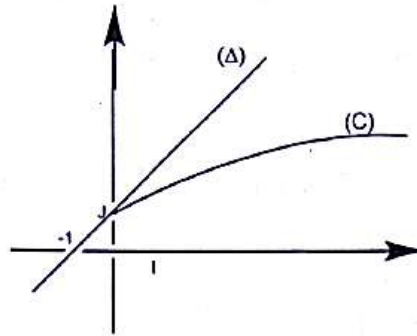
$$(\Delta) : y = x + 1$$

c) Construction de (\mathcal{C}) et de (Δ)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + \ln(1+x)] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x} \right] = 0$$

d'où (\mathcal{C}) admet une branche parabolique de direction axe des abscisses



2) La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{1+x} \geq 0$$

g est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, g est donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur

$g([0, +\infty[) = \left[g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[= [-1, +\infty[$ puisque $0 \in [0, +\infty[$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α .

$$g(2) = 1 - \ln 3 < 0 \quad ; \quad g(3) = 2 - \ln 4 > 0$$

$$g(2) \cdot g(3) < 0 \text{ d'où } \alpha \in [2, 3]$$

Conclusion l'équation $x = f(x)$ admet une solution unique $\alpha \in [2, 3]$

~ ENONCES ~

EXERCICE 1

Soit trois points distincts A, B, C non alignés d'un plan affine P. On considère le système de points pondérés. $S = \{(A, 2); (B, 3); (C, -5)\}$

- 1) S admet-il un barycentre ?
- 2) Soit C' le barycentre du système $\{(A, 2); (B, 3)\}$ et B' le barycentre $\{(A, 2); (C, -5)\}$ construire C' et B' puis montrer que les droites (CC') et (BB') sont parallèles.
- 3) Montrer que C' est l'image de B par une homothétie de centre A dont on précisera le rapport. Quelle est l'image de B' par cette homothétie ?

EXERCICE 2

On donne dans le plan affine E deux points distincts A et B

- 1) Déterminer la condition sur le couple (a, b) pour que pour tout point M de E, il existe un unique point M' de E tel que $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$
- 2) On suppose dans toute la suite de l'exercice réalisée la condition trouvée dans la question 1) et on désigne par f l'application de E dans E qui à M associe M'
 - a) Déterminer suivant les valeurs du couple (a, b) l'ensemble des points invariants par f
 - b) On suppose $a + b \neq 0$; montrer que f est une homothétie ponctuelle dont on déterminera le centre et le rapport.

EXERCICE 3

Dans le plan affine euclidien de repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ on appelle G l'isobarycentre des points $A(a; b); B(b; 0); C(0; a)$ où a et b sont deux réels.

- 1) Déterminer l'ensemble décrit par G lorsque a et b varient.
- 2) Dans cette question on suppose a fixe et $b = 2a$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 10a^2$.

EXERCICE 4

Soit E un espace affine de dimension 3. On donne 3 points A, B, C et f l'application de E dans \mathbb{R} définie par : $f: M \mapsto 2\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MC}\|^2$

- 1) Justifier l'existence du point G barycentre des points $(A, 2); (B, 3); (C, -2)$. Donner une relation vérifiée par les vecteurs $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$.
- 2) Montrer que $f(M) = 3\|\overrightarrow{MG}\|^2 + k$ où $k = f(G)$
- 3) Discuter suivant les valeurs de k la nature de l'ensemble des points M de E tels que $f(M) = 4$.

EXERCICE 5

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ on donne les points $A(2, 4); B(1, 0); C(6, 0)$.

Géométrie

- 1) Placer ces points dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 2) On appelle H l'orthocentre du triangle ABC.
 - a) Vérifier que H est le barycentre du système pondéré $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ où $b = \frac{12}{5}$ et $c = \frac{3}{5}$
 - b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tel que $5MA^2 + 12MB^2 + 3MC^2 = 140$
(Compo SET 1989)

EXERCICE 6

- 1) Déterminer les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^4 = (2 + 3i)^4$. Construire leurs images dans le plan complexe.
- 2) On désigne par A, B, C les points du plan complexe d'affixe respectives: $z_0 = 3$; $z_1 = 2 - i$; $z_2 = -1 - i$
 - a) Déterminer les coordonnées du barycentre G des points pondérés: $(A, -1); (B, 1); (C, 1)$
 - b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 1$
 - c) Soient A', B', C' les images respectives des points A, B et C par une transformation f du plan.

Comparer les angles $(\widehat{A'B'}, \widehat{A'C'})$ et $(\widehat{AB}, \widehat{AC})$ dans chacun des cas suivants :

- f est une homothétie de rapport -2 , de centre quelconque
- f est une symétrie orthogonale d'axe quelconque.

On construira la figure pour mieux visualiser les angles.

EXERCICE 7

On donne deux points distincts A et B du plan affine et un réel k non nul. Soit M_1 l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport k, soit M' le barycentre des points B et M_1 affectés respectivement des coefficients a et 1, a étant un réel distinct de -1 . Soit f l'application qui à tout point M du plan associe M'.

- 1) Montrer que pour tout point M du plan affine on a : $(a + 1)\overline{MM'} = (1 - k)\overline{MA} + a\overline{MB}$
- 2) Montrer que si $k = a + 1$ alors f est une translation dont on déterminera le vecteur.
- 3) Montrer que si $k \neq a + 1$ il existe un unique point invariant G par f. Montrer qu'alors f est une homothétie de centre G dont on déterminera le rapport.

EXERCICE 8

ABC est un triangle du plan euclidien P : $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

- a) Quel est l'ensemble des points M du plan P tels que : $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$?
- b) Déterminer $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.
- c) Montrer que pour tout point M du plan on a :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = 3MG^2 \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2)$$

EXERCICE 9

Dans le plan affine euclidien P ABCD est un carré de centre O et de côté a.

- 1) Déterminer les réels b, c et d tels que A soit le barycentre de $(B, b); (C, c); (D, d)$ et déterminer l'ensemble des points N du plan P tels que $\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NC}^2 = 0$
- 2) Déterminer le nombre réel α , de façon que O soit le barycentre des points A, B, C et D affectés respectivement des coefficients : $\alpha, 2, -1$ et 2.

Géométrie

- 1) Déterminer les réels b, c et d tels que A soit le barycentre de $(B, b); (C, c); (D, d)$ et déterminer l'ensemble des points N du plan P tels que $\vec{NB} \cdot \vec{NC} + \vec{NC} \cdot \vec{ND} - \vec{NC}^2 = 0$
- 2) Déterminer le nombre réel α , de façon que O soit le barycentre des points A, B, C et D affectés respectivement des coefficients : $\alpha, 2, -1$ et 2 .
- 3) Déterminer le nombre réel β de façon que A soit le barycentre des points O, B, C et D affectés respectivement des coefficients $\beta, 2, -1$ et 2 .
- 4) Quel est l'ensemble E des points M de P tels que : $-2MO^2 + 2MB^2 - MC^2 + MD^2 = k^2$ (Discuter suivant les valeurs de k réel quelconque).

EXERCICE 10

- 1) Soit P le plan affine euclidien et $AB = AC = 5$ et $BC = 6$. Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- 2) On désigne par G le barycentre de $(A, 2); (B, 3); (C, 3)$. Construire le point G et calculer GA .
- 3) On considère l'application f de P dans \mathbb{R} telle que $f(M) = 2\vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MA} + \vec{MA} \cdot \vec{MB}$.
Démontrer que l'on a pour tout point M de P $f(M) = f(G) + 4MG^2$. Calculer numériquement $f(A)$ et $f(G)$
- 4) Déterminer et construire l'ensemble E des points M tels que $f(M) = f(A)$

EXERCICE 11

Soit le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$. A tout point $M(x, y)$ on associe les points $A(o, x)$ et $B(-y, o)$ puis le point $M'(x', y')$ barycentre des points M, A, B affectés respectivement des coefficients $(1 - \alpha - \beta), \alpha$ et β étant des nombres réels, on désigne par $f_{\alpha, \beta}$ l'application de P dans P telle que $f(M) = M'$.

- 1) Montrer que x' et y' vérifient :
$$\begin{cases} x' = (1 - \alpha - \beta)x - \beta y \\ y' = \alpha x + (1 - \beta - \alpha)y \end{cases}$$
 En déduire que f est une application affine laissant au moins un point invariant.
- 2) Déterminer les couples (α, β) de réels tels que $f_{\alpha, \beta}$ soient involutive.
- 3) Déterminer la nature de l'involution qui correspond à $\alpha > \beta$. (On pourra chercher d'abord l'ensemble des points invariants).

EXERCICE 12

P désigne dans ce qui suit un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$. On considère l'application affine f de P dans P qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 \end{cases}$$

- 1) Cette application admet-elle des points invariants ?
 f est-elle bijective ? Déterminer l'ensemble $f(P)$.
- 2) Soit ϕ l'endomorphisme associé à f ; montrer que ϕ est une projection vectorielle orthogonale sur une droite vectorielle D dont on déterminera une équation cartésienne.

EXERCICE 13

Géométrie

Dans le plan complexe orienté, muni du repère $(o; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct, on considère la transformation T qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = 2(1-i)\bar{z} + \frac{7i}{2}.$$

Démontrer que T est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une homothétie dont le centre Ω appartient à l'axe Δ de la symétrie. Déterminer Ω , Δ et le rapport de l'homothétie.

(Bac 1988 SET)

EXERCICE 14

Un plan affine P étant rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$, soit $z = x + iy$ l'affixe d'un point $M(x, y)$ de ce plan.

- 1) Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $|(1+i)z - 2i| = 2$
 - 2) Quelle est la nature de la transformation F qui à chaque point M d'affixe z fait correspondre M' d'affixe $z' = (1+i)z - 2i$.
- Déterminer les éléments géométrique de cette transformation.

EXERCICE 15

Le plan affine E est rapporté au repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$. On considère l'application affine de E dans E qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y = \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

- a) Montrer que tout point M , le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant.
- b) Etudier l'ensemble des points invariants par f .
- c) Reconnaître la nature de l'application f .
- 2) Soit g l'application affine de E dans E : $M(x, y) \mapsto M''(x'', y'')$ telles que :

$$\begin{cases} x'' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

- a) Montrer que g peut s'écrire hof où h est une application de E dans E que l'on précisera.
- b) Sans calcul, vérifier que $hof = foh$.

EXERCICE 16

P est un plan rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$. Soit a un nombre réel. On considère

l'application affine f_a définie par : $M(x, y) \mapsto M'(x', y')$ avec
$$\begin{cases} x' = ax + a - 1 \\ y' = (3a-1)x + (1-2a)y + 2 \end{cases}$$

- a) Montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle f_a est une homothétie dont on déterminera le Centre et le rapport
- b) Existe-t-il a tel que f_a soit involutive ? Montrer qu'alors f_a est une symétrie que l'on précisera.
- c) Déterminer avec précision l'ensemble $f_a(P)$ suivant les valeurs de a .
- d) On suppose $a = 0$. Soit t la translation de vecteur $3\vec{j}$. Montrer qu'il existe une projection p que l'on déterminera telle que $f = top = pot$.

Dans le plan affine euclidien muni du repère orthonormé direct $(o; \vec{i}; \vec{j})$ on considère les points $A(3, -1)$ et $B(0, 2)$. On désigne par :

- h l'homothétie de centre A et de rapport $-\sqrt{2}$.
- r la rotation de centre B et d'angle dont une mesure est $\frac{3\pi}{4}$.
- t la translation de vecteur \overrightarrow{BO}

a) Construire, après avoir donné une justification rapide le point Ω du plan dont l'image par $to ro h$ est l'origine o

c) Quelle est la nature de la transformation $to ro h$? En donner les éléments caractéristiques.

EXERCICE 18

(similitude)

Le plan affine euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(o; \vec{i}; \vec{j})$. On considère les points $A(1, 0)$; $B(0, 1)$. Soit S_1 la similitude plane directe de centre A dont une détermination de l'angle est $\frac{2\pi}{3}$ et de rapport 2. Soit S_2 la similitude plane directe de centre B d'angle dont une détermination est $\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

1) Quelle est la nature de $T = S_2 \circ S_1$?

2) Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ le transformé de M par T . Exprimer x' et y' en fonction de x et de y .

EXERCICE 19

Soit E_2 le plan affine euclidien rapporté en repère orthonormé direct $R = (o; \vec{i}; \vec{j})$. Soit f l'application de

E_2 dans E_2 telle que $M(x, y) \mapsto M'(x', y')$ et $\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}(2 - y) \\ y' = (x - 1)\sqrt{3} + y \end{cases}$.

Soit z et z' les affixes respectives de M et M' .

1) Montrer que l'on peut déterminer deux nombres complexes uniques a et z_0 tel que $z' - z_0 = a(z - z_0)$

2) En déduire la nature de f .

3) Quelle est l'image par f du cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

EXERCICE 20

Soit E l'espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Soit f l'application de E dans E qui au point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que

$$\begin{cases} x' = -z + 1 \\ y' = x - 4 \\ z' = -y \end{cases}$$

Démontrer que f est la composée d'une rotation r d'axe Δ et d'une translation t de vecteur \vec{v} , \vec{v} étant un vecteur directeur de Δ (Autrement dit, f est un vissage). Déterminer Δ et \vec{v} .

EXERCICE 21

(SET Compo 1990)

Géométrie

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de E . Soit $A(4, 2, 2)$ et $B(0, 2, 0)$ deux points de E ; s la symétrie orthogonale par rapport à un plan P telle que $s(A) = B$.

- 1) Déterminer équation cartésienne du plan P .
- 2) Définir analytiquement s .
- 3) Soit Q le plan dont un repère cartésien est (A, \vec{AB}, \vec{j}) . Montrer que Q est globalement invariant par s .

EXERCICE 22

1) P est le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(o; \vec{i}, \vec{j})$. Dans ce plan P on donne les points $A(-2, 1)$; $B(0, 2)$; $C(1, -2)$ et $E(-2, -2)$. Soit f la symétrie axiale telle que $f(A) = a$; $f(C) = c$ et $f(B) = E$.

- a) Placer dans le plan les points A, B, C, E, I et $f(I)$ où I est le milieu du segment $[BC]$.
- b) Donner une équation cartésienne de l'axe et la direction de f .
- 2) Soit D la droite d'équation $x + y + 1 = 0$ et Δ la droite d'équation $y = 1$.
- a) Trouver l'image par la projection g sur D parallèlement à Δ des points $C(1, -2)$ et $F(0, 1)$.
- b) Définir analytiquement la projection g .

EXERCICE 23

Dans le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(o; \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite D dont une équation est $y = 2x - 1$ et le point $A(1, 1)$.

Soit S la réflexion d'axe D (symétrie orthogonale par rapport à D) et h l'homothétie de centre A qui transforme le point de coordonnée $(\frac{3}{2}, 2)$ au point de coordonnées $(2, 3)$.

- 1) Dans le plan, construire l'image par $h \circ S$ des points O, E et F où $E(0, \frac{3}{2})$ et $F(2, 1)$.
- 2) Définir analytiquement les applications S, h et $f = h \circ S$.
- 3) En désignant par $M(x, y)$ le point d'affixe $z = x + yi$ et $M'(x', y')$ d'affixe $z' = x' + y'i$ son image par f , exprimer z' en fonction de z .
- 4) Dédire des questions précédentes la nature et les éléments caractéristiques de f .

EXERCICE 24

Soit dans le plan affine euclidien l'affinité orthogonale ϕ d'axe $\Delta: y = x + 1$ et de rapport $k = -2$

- 1) Construire dans le repère $(o; \vec{i}, \vec{j})$ l'image par ϕ des points O, A, B où $A(1, 0)$; $B(0, -1)$. Quelles sont les coordonnées des points images de $E(0, 1)$ et $F(-1, 0)$.
- 2) Définir analytiquement ϕ puis donner une équation cartésienne du cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon $r = 1$ et de son image par ϕ . Quelles sont les coordonnées du point O_1 tel que $\phi(O_1) = O$?

EXERCICE 25

Le plan affine P étant rapporté à un repère orthonormé $(o; \vec{i}, \vec{j})$ on considère l'application de P dans P

définie analytiquement par :
$$\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

- 1) Démontrer que f est un déplacement

- 2) Montrer qu'il existe un point A et un seul, invariant par f.
- 3) Montrer que pour tout point $M \neq A$, de transformé M' par f on a : $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{AM'}\|$ et que l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})$ est constant.
- 4) Quel est l'ensemble des points M de P tels que O, M, M' soient alignés ?

(Bac SET 1992)

EXERCICE 26

Soit ABC un triangle rectangle isocèle direct de sommet A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note \mathcal{C} le cercle de centre B et de rayon BA, \mathcal{C}' le cercle de centre C et de rayon CA. Les cercles (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') se recoupent en M.

- 1) a) Montrez que $S_{(AM)}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$, $S_{(AM)}$ étant la réflexion d'axe la droite (AM).
- b) Déduisez – en l'égalité $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC})$
- 2) Déterminez la nature de l'isométrie $r = S_{(AM)} \circ S_{(AB)}$
- 3) Déterminez l'image du cercle (\mathcal{C}) par r.
 - a) en déterminant l'image de (\mathcal{C}) par chaque réflexion
 - b) en déterminant directement la rotation r.
- 4) Soit $f = S_{(AM)} \circ S_{(AB)}$. Déterminez l'image (\mathcal{C}_f) du cercle (\mathcal{C}) par f et représentez la. Montrez que (AB) est tangente à (\mathcal{C}_f)

EXERCICE 27

Soit ABC un triangle et O un point du plan orienté distinct des points A, B, C.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On désigne par A', B', C' les images respectives de A, B, C par r.

On construit alors les points D, E, F tels que les quadrilatères OA'DB, OB'EC, OC'FA soient des parallélogrammes.

On note a, b, c, a', b', c', d, e, f les abscisses respectives de A, B, C, A', B', C', D, E, F dans un repère orthonormal direct d'origine O.

- 1) Calculez a', b', c' puis d, e, f.
- 2) a) calculez (e – d) et (f – d)
- b) Montrer alors que $f - d = e^{i\frac{\pi}{3}}(e - d)$
- c) Déduisez – en que le triangle DEF est équilatéral.

EXERCICE 28

- 1) On considère dans le plan orienté, un carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit $A_1 B_1 C_1 D_1$ un parallélogramme tel que A, B, C, D appartiennent respectivement aux segments $[A_1 B_1]$, $[B_1 C_1]$, $[C_1 D_1]$, $[D_1 A_1]$.

Géométrie

- a) Montrez que les droites $(A_1 D_1)$ et $(D_1 C_1)$ sont les images des droites $(B_1 C_1)$ et $(A_1 B_1)$ par la symétrie Δ de centre O . Montrez que O est le centre du parallélogramme $A_1 B_1 C_1 D_1$.
- b) Soit Δ l'image de la droite $(A_1 B_1)$ par la rotation r de centre O , d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Etablissez que C est commun aux droites $(B_1 C_1)$ et (Δ) .
- 2) Soit A_1, B_1, C_1, D_1 les points de coordonnées respectives $(1, -2)$, $(3, 2)$, $(-1, 2)$ et $(-3, -2)$ dans un plan orienté rapporté au repère orthonormal direct $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
- En utilisant la question (1) construisez un carré inscrit dans le parallélogramme $A_1 B_1 C_1 D_1$ (on donnera les coordonnées des sommets de ce carré).

EXERCICE 29

On considère un losange $ABCD$ de centre O de côté x tel que : $\left(\vec{AB}, \vec{AD}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

- 1) Calculez les distances AD et AC
- 2) Soit S la similitude directe de centre C , d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 - a) Montrez que S transforme A en B .
 - b) Montrez que l'image O' du point O est le milieu de $[BC]$
 - 3) On note D' l'image de D
 - a) Montrez que D' appartient à la demi-droite $[CA)$.
 - b) Que vaut l'angle $\left(\vec{OD}, \vec{O'D'}\right)$?
 - c) Déduisez-en l'angle $\left(\vec{BC}, \vec{O'D'}\right)$
 - 4) Montrez alors que D' est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD .

EXERCICE 30

On considère dans le plan orienté un triangle OAB rectangle isocèle tel que $OA = OB = \alpha$ et $\left(\vec{OA}, \vec{OB}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note I le milieu du segment $[AB]$.

Soit M un point de la droite (OA) , k le réel tel que $\vec{MA} = k\vec{OA}$ et soit N le point défini par $\vec{NB} = -k\vec{OB}$.

- 1) Dans cette question M est différent de A .
 - a) Déterminez une mesure en radians de $\left(\vec{MA}, \vec{NB}\right)$
 - b) On considère la rotation r qui transforme A en B et M en N . Précisez l'angle de cette rotation. Soit Ω son centre. Montrez que $O A \Omega B$ est un carré.
- 2) On note J le milieu de $[MN]$
 - a) Déterminez l'angle et le rapport de la similitude s de centre Ω qui transforme M en J .
 - b) Déterminez l'ensemble (E) des points J lorsque M décrit la droite (OA) . Représentez (E)

EXERCICE 31

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(o; \vec{u}; \vec{v})$. On note s la similitude directe de détermination complexe $z' = \left(\frac{1+i}{2}\right)z$.

- 1) Déterminez les éléments caractéristiques de s .
- 2) Soit (A_n) la suite de points définie par :

$$\begin{cases} A_0 \text{ a pour affixe } 1 \\ \text{pour tout } n \geq 0, A_{n+1} = s(A_n) \end{cases}$$
 - a) Déterminez les affixes z_1 et z_2 de A_1 et A_2 .
 - b) En calculant $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$, déterminez la nature du triangle OAA_{n+1} , et déduisez – en une construction géométrique de A_{n+1} à partir de A_n . Représentez $A_0, A_1, A_2, \dots, A_8$
 - a) Comparez $\|\vec{A_{i+1}A_{i+2}}\|$ et $\|\vec{A_iA_{i+1}}\|$ pour tout entier i .
 - c) On note $L_n = \sum_{i=0}^n \|\vec{A_iA_{i+1}}\|$. Calculez L_n en fonction de n puis déterminez $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$.

EXERCICE 32

- 1) Le cm est l'unité de longueur choisie. On fera une figure pour visualiser.

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3, B' milieu de $[AC]$ et un point D tel que : $4\vec{AD} + 3\vec{BC}$

- a) Démontrer que D est le barycentre des points pondérés $(A, 3), (B, -2), (C, 3)$. En déduire que D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$.
- b) Démontrer que $\vec{BB'} = \frac{2}{3}\vec{BD}$
- c) Calculer DA^2 et BD^2
- d) Déterminer l'ensemble (E) des point M du plan vérifiant la relation : $3AM^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$
Vérifier que l'isobarycentre G du triangle ABC appartient à l'ensemble (E) . Tracer (E) .
- 2) a) Dans l'espace muni d'un repère $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, placer les points : $Q(6; 0; 0), (0; 6; 0) S(0; 0; 4)$
- b) Déterminer les coordonnées du barycentre G des points massifs $(Q; 2); (O; 1); (R; 3)$
- c) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que : $\left(\vec{MO} + 2\vec{MQ} + 3\vec{MR}\right)\vec{MS} = 0$
Donner une équation cartésienne de (Γ)
- d) Déterminer l'intersection de (E) et du plan d'équation $x = 0$ dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

EXERCICE 33

Dans un plan P , on considère 3 points non alignés A, B et C . Soit s la réflexion d'axe (AC) qui transforme B en D et soit f l'application affine P dans P telle que $f(A) = A; f(B) = C; f(C) = D$.

- 1) On pose $g = sof$
 - a) Déterminer l'image par g des points A, B, C et celle du milieu I de $[BC]$
 - b) Etablir que g est une symétrie dont on précisera l'axe (d) et la direction
 - c) Exprimer f en fonction de g et s . En déduire une construction géométrique de l'image M d'un point de P par f
- 2) Comment faut – il choisir A, B, C pour que f soit une isométrie ? Explicitez alors cette isométrie.

~ SOLUTIONS ~

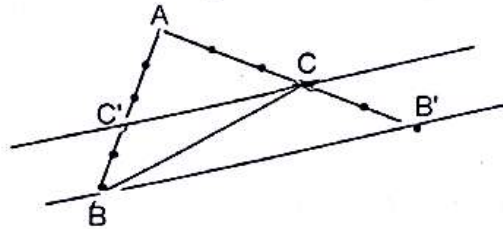
EXERCICE 1

A, B, C trois points non alignés : $S = \{(A, 2); (B, 3); (C, -5)\}$

1) S n'admet pas de barycentre car la somme des coefficients est nulle.

2) C' barycentre de $\{(A, 2); (B, 3)\} \Rightarrow \vec{AC'} = \frac{3}{5} \vec{AB}$

B' barycentre de $\{(A, 2); (C, -5)\} \Rightarrow \vec{AB'} = \frac{5}{3} \vec{AC}$



$$\begin{cases} \vec{AC'} = \frac{3}{5} \vec{AB} \\ \vec{AB'} = \frac{5}{3} \vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AC} + \vec{CC'} = \frac{3}{5} \vec{AB} \\ \vec{AB} + \vec{BB'} = \frac{5}{3} \vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\vec{AC} + 5\vec{CC'} = 3\vec{AB} \\ 3\vec{AB} + 3\vec{BB'} = 5\vec{AC} \end{cases} \Leftrightarrow 5\vec{CC'} + 3\vec{BB'} = \vec{0} \text{ d'où les} \\ \text{droite } (BB') \text{ et } (CC') \text{ sont parallèles.}$$

3) D'après la relation $\vec{AC'} = \frac{3}{5} \vec{AB}$, $C' = h(B)$ où h est une homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{5}$

EXERCICE 2

A et B deux points distincts

1) $a \vec{M'A} + b \vec{M'B} + 2 \vec{M'M} = \vec{0}$. Le point M' est unique si et seulement si $a + b + 2 \neq 0$

2) $a + b + 2 \neq 0 : f: P \rightarrow P : M \xi M'$ tel que : $a \vec{M'A} + b \vec{M'B} + 2 \vec{M'M} = \vec{0}$

a) $f(M) = M \Leftrightarrow a \vec{MA} + b \vec{MB} = \vec{0}$

- Si $a + b \neq 0$ alors M est le barycentre de $\{(A, a); (B, b)\}$
- Si $a + b = 0$ alors $b = -a$ et $a \vec{MA} + b \vec{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow a(\vec{MA} - \vec{MB}) = \vec{0}$.
- Si $a = 0$ alors tous les points sont invariants c-à-d f est l'application identique.
- $a \neq 0$ alors il n'existe pas de points invariant

b) $a + b \neq 0 \{(A, a); (B, b)\}$ admet un barycentre $G : a \vec{M'A} + b \vec{M'B} + 2 \vec{M'M} \Leftrightarrow$

$$a \vec{M'G} + a \vec{GA} + b \vec{M'G} + b \vec{GB} + 2 \vec{M'G} + 2 \vec{GM} = \vec{0} \Leftrightarrow (a + b + 2) \vec{M'G} + 2 \vec{GM} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{GM'} = \frac{2}{a + b + 2} \vec{GM} \text{ } f \text{ est donc l'homothétie de centre } G \text{ et de rapport } k = \frac{2}{a + b + 2}$$

EXERCICE 3

$A(a; b)$; $B(b; 0)$; $C(0; a)$; a et b deux réels :

1) G isobarycentre de A, B, C donc les coordonnées de G sont $\begin{cases} X = \frac{a+b}{3} \\ Y = \frac{b+a}{3} \end{cases} \Leftrightarrow X = Y$ d'où

l'ensemble des points G est la droite d'équation $Y = X$.

2) $b = 2a$ (a fixe) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 10a^2$.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $MA^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$; $MB^2 = (x-b)^2 + y^2$; $(y-a)^2 + x^2 = MC^2$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 10a^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 2(a+b)x - 2(a+b)y + 2a^2 + 2b^2 = 10a^2$$

$b = 2a$ donc $3x^2 + 3y^2 - 6ax - 6ay = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2ay = 0 \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-a)^2 = 2a^2$ qui est l'équation du cercle de centre $r(a, a)$ et de rayon $r = a\sqrt{2}$.

EXERCICE 4

E espace affine de dimension 3 ; A, B, C trois points de E .

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}: M \mapsto 2\|\vec{MA}\|^2 + 3\|\vec{MB}\|^2 - 2\|\vec{MC}\|^2$$

1) La somme des coefficients est 3 (non nulle) donc le barycentre G existe.

Par définition : $2\vec{GA} + 3\vec{GB} - 2\vec{GC} = \vec{0}$

2) On sait que $f(M) = \sum \alpha_i MG^2 + f(G)$ donc $f(M) = 3MG^2 + 2GA^2 + 3GB^2 - 2GC^2$: il suffit de poser $k = 2GA^2 + 3GB^2 - 2GC^2$

$$3) f(M) = 4 \Leftrightarrow 3MG^2 + k = 4 \Leftrightarrow 3MG^2 = 4 - k$$

• Si $k = 4$ alors $M = G$

• Si $k > 4$ alors $4 - k < 0$ et dans ce cas M n'existe pas

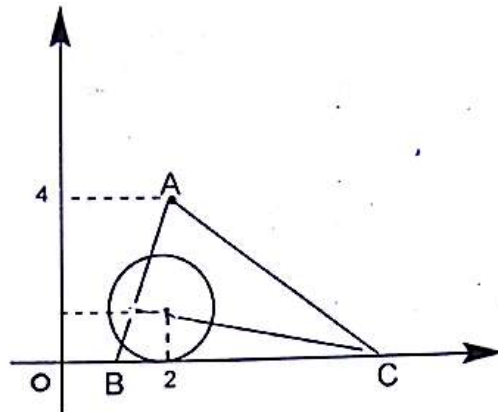
• Si $k < 4$ alors $MG^2 = \frac{4-k}{3} \Leftrightarrow MG = \sqrt{\frac{4-k}{3}}$. L'ensemble des points M est le cercle de

centre G et rayon $r = \sqrt{\frac{4-k}{3}}$

EXERCICE 5

(o, \vec{i}, \vec{j}) repère orthonormé : $A(2; 4)$; $B(1; 0)$; $C(6; 0)$

1)



2) L'orthocentre est le point d'intersection des hauteurs. La hauteur (AH) a pour équation $x = 2$:

Soit $H(x, y)$, la hauteur (CH) est définie par $\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$

$$\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow -(x-6) - 4y = 0 \Leftrightarrow -x - 4y + 6 = 0. \text{ Puisque } x = 2 \text{ alors } y = 1 : H(2, 1)$$

Les coordonnées du barycentre du système $S = \left\{ (A, 1); (B, \frac{12}{5}); (C, \frac{3}{5}) \right\}$ sont $\begin{cases} X = \frac{2+6}{4} = 2 \\ Y = \frac{4+0}{4} = 1 \end{cases}$ d'où

$H(2, 1)$ est le barycentre de S .

b) $5MA^2 + 12MB^2 + 3MC^2 = 140 \Leftrightarrow MA^2 + \frac{12}{5}MB^2 + \frac{3}{5}MC^2 = 28$. H étant le barycentre de S alors l'équation est équivalente à $4MH^2 + HA^2 + \frac{12}{5}HB^2 + \frac{3}{5}HC^2 = 28$

$$\vec{HA} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow HA^2 = 9 ; \vec{HB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow HB^2 = 2 ; \vec{HC} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow HC^2 = 17$$

$4MH^2 + 9 + \frac{24}{5} + \frac{51}{5} = 28 \Leftrightarrow 4MH^2 = 4 \Leftrightarrow MH^2 = 1$. L'ensemble des points M est le cercle de centre H et de rayon $r = 1$.

EXERCICE 6

1) Dans \mathbb{C} l'ensemble des solutions de $z^4 = (2+3i)^4$ est $S = \left\{ \underset{M_1}{2+3i}, \underset{M_2}{-2-3i}, \underset{M_3}{-3+2i}, \underset{M_4}{3-2i} \right\}$

2) $z_0 = 3$; $z_1 = 2-i$; $z_2 = -1-i$:

a) $A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $C \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ les coordonnées du barycentre G de $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ sont

$$X = -2,$$

$$Y = -2 : G \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$b) MB^2 + MC^2 - MA^2 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + (x+1)^2 + (y+1)^2 - (x-3)^2 + y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 4x + 4y = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}y = 1 \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{17}{9} \Rightarrow$$

l'ensemble des points M est le cercle de centre $\Omega \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{17}}{3}$

c) $f(A) = A'$; $f(B) = B'$; $f(C) = C'$

- Si $f = h(r, -2)$ alors $(\overline{A'B'}; \overline{A'C'}) = (\overline{AB}; \overline{AC})$

- Si f est la symétrie orthogonal d'axe D alors $(\overline{A'B'}; \overline{A'C'}) = -(\overline{AB}; \overline{AC})$

EXERCICE 33

Dans un plan P , A , B et C sont trois points alignés S est la réflexion d'axe (AC) qui transforme B en D f est l'application affine telle que :

$$f(A) = A, f(B) = C \text{ et } f(C) = D$$

1) On pose $g = \text{Sof}$

a) Détermination de l'image par g des points A , B , C et du milieu I de $[BC]$:

$\overbrace{\quad}^f$	$\overbrace{\quad}^S$
$A \mid A$	$A \mid A$
$B \mid C$	$C \mid C$
$C \mid B$	$B \mid D$

$$g(A) = \text{Sof}(A) = S(A) = A$$

$$g(C) = \text{Sof}(C) = S(D) = B$$

$$g(B) = \text{Sof}(B) = S(C) = C$$

g est une application affine composée de deux applications affines. L'image du milieu I de $[BC]$ est le milieu de $[g(B), g(C)] = [CB]$ d'où $g(I) = I$

b) Établissons que g est une symétrie :

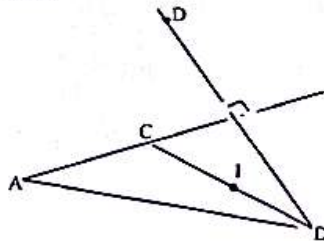
(A, B, C) est une repère du plan

$$gog(A) = g(A) = A$$

$$gog(B) = g(C) = B$$

$$gog(C) = g(B) = C$$

g est involutive par suite g est une symétrie.



A et I sont invariants par $g \Rightarrow (AI)$ est invariante par g . B n'est pas invariant d'où l'ensemble de points invariants est la droite (AI)

L'axe de la symétrie g est la droite (AI)

$g(B) = C$ d'où la direction de la symétrie g est celle de la droite (BC)

$$c) g = \text{Sof} \Rightarrow \text{Sog} = \text{So}(\text{Sof}) \Rightarrow f = \text{Sog} \text{ car } \text{SoS} = \text{Id}_P$$

Construction de l'image M' d'un point M par f :

$$\text{Posons } M_1 = g(M) \text{ on a donc } f(M) = \text{Sog}(M) = S(M_1) = M'$$

D'où le programme de construction :

- Construire l'image M_1 de M par la symétrie g .
- Construire l'image de M_1 par la réflexion S qui n'est autre que le point M' .

$$2) f(A) = A', f(B) = C$$

f isométrie alors $AB = AC$

D'où il faut choisir le triangle ABC isocèle de sommet principal A pour que f soit une isométrie. Si ABC est isocèle g est la réflexion d'axe (AI) f est donc la composée de deux réflexions d'axe sécants en A est rotation de centre A et d'angle

