

**UNIDAD XXIV**

**INTEGRAL**

## Introducción

Esta última unidad está dedicada al estudio del proceso de la integración de una función, definiéndola como la operación, que al ser efectuada invierte el proceso llevado a cabo en la derivación. Una colección de ejemplos adecuados permite al alumno iniciarse en la obtención de la integral de funciones.

Por medio de algunas aplicaciones simples de la integral se logra que el alumno comprenda la diferencia entre integral indefinida e integral definida.

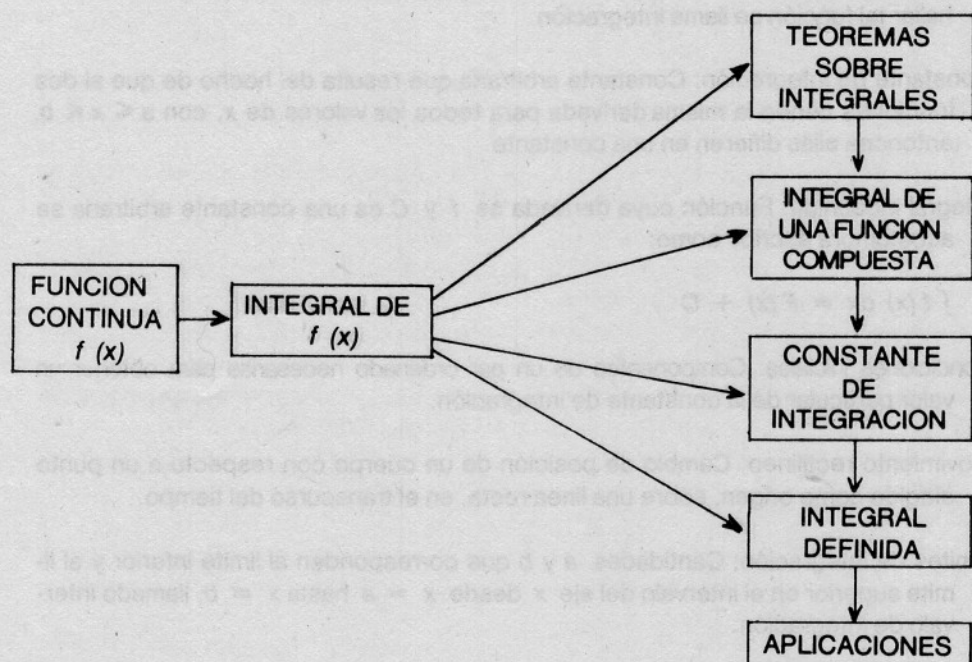
Por último, es necesario hacer notar que el material aquí presentado fue objeto de una selección minuciosa, a fin de que el estudiante pueda adquirir una formación adecuada, que le permita abordar futuros estudios profesionales.

# Objetivos Generales

Al terminar de estudiar esta unidad, el alumno:

1. Explicará el proceso de integración de una función como la operación que al efectuarse invierte el proceso de derivación.
2. Establecerá la diferencia entre integral indefinida e integral definida.
3. Resolverá integrales de funciones de una sola variable independiente, aplicando diferentes teoremas de integración.
4. Empleará el concepto de integral en la solución de problemas de movimiento rectilíneo de un móvil.
5. Utilizará la integración de funciones en diferentes aplicaciones geométricas (Determinación de ecuaciones de curvas y cálculo de áreas).

# Diagrama Temático Estructural





# Glosario

**Integración:** Toda función cuya derivada es  $f$  es una integral de  $f$ . El proceso para hallar tal función se llama integración.

**Constante de integración:** Constante arbitraria que resulta del hecho de que si dos funciones tienen la misma derivada para todos los valores de  $x$ , con  $a \leq x \leq b$ , entonces ellas difieren en una constante.

**Integral indefinida:** Función cuya derivada es  $f$  y  $C$  es una constante arbitraria se acostumbra escribir como:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

**Condiciones iniciales:** Componentes de un par ordenado necesarias para obtener un valor particular de la constante de integración.

**Movimiento rectilíneo:** Cambio de posición de un cuerpo con respecto a un punto elegido como origen, sobre una línea recta, en el transcurso del tiempo.

**Límites de integración:** Cantidades  $a$  y  $b$  que corresponden al límite inferior y al límite superior en el intervalo del eje  $x$  desde  $x = a$  hasta  $x = b$ , llamado intervalo de integración.

**Área bajo una curva:** Si la función  $f$  es positiva y continua, en el intervalo  $a \leq x \leq b$  el área limitada por  $y = f(x)$ , el eje  $x$  y las rectas verticales  $x = a$  y  $x = b$  está dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

donde  $F' = f$

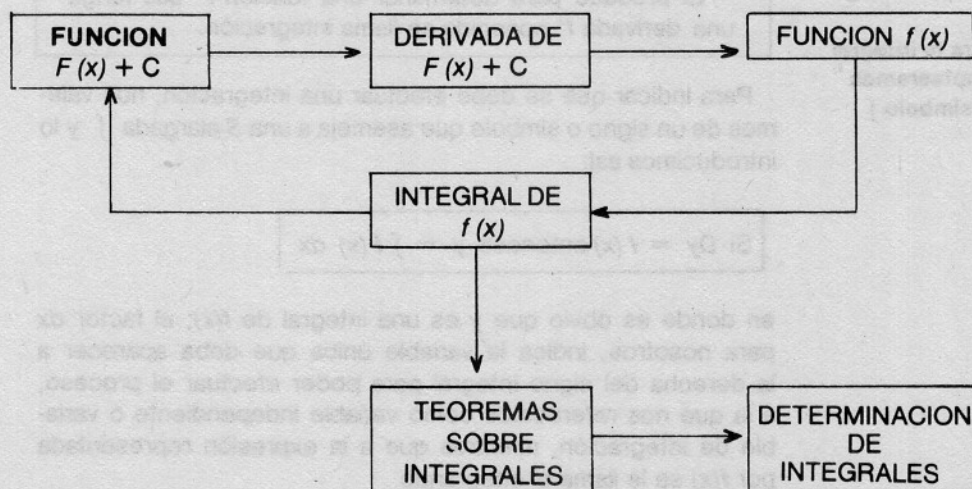
# Módulo 13

## OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Justificará la existencia de la constante de integración en una integral indefinida.
2. Determinará la integral de una función potencial.
3. Determinará la integral del recíproco de una función.
4. Determinará la integral de la función exponencial.
5. Determinará las integrales de funciones simples dadas, aplicando los teoremas sobre integración.
6. Comprobará la integral de una función dada por medio de la derivación.

## ESQUEMA RESUMEN



### 13.1 Integración

La integración es el proceso inverso a la derivación

En este curso se ha dado una breve descripción de la derivación de una función; vamos a considerar la *integración* de una función, como la operación que al efectuarse invierte el proceso llevado a cabo en la derivación. Esto significa que si  $f'$  es la derivada de una función, integrar  $f'$  nos lleva a determinar  $f$ . Si  $f'(x) = x^5$  y queremos encontrar  $f(x)$ , podemos lograrlo si recordamos la derivada de  $x^n$  y procedemos a la inversa;

una respuesta sería  $\frac{1}{6} x^6$  porque

$$D\left(\frac{1}{6} x^6\right) = x^5, \text{ pero es fácil notar que } \left(\frac{1}{6} x^6 + C\right) \text{ donde}$$

$C$  es una constante real, tiene la misma derivada que  $\frac{1}{6} x^6$ ,

como  $C$  se puede sustituir por cualquier número real entonces existe un sinnúmero de funciones cuya derivada es  $x^5$ .

De lo anterior podemos concluir que  $x^5$  tiene innumerables integrales.

Definición:

El proceso para determinar una función  $f$  que tenga una derivada  $f'$  conocida se llama integración.

Para la integral emplearemos el símbolo  $\int$

Para indicar que se debe efectuar una integración, nos valemos de un signo o símbolo que asemeja a una S alargada  $\int$  y lo introducimos así:

$$\text{Si } Dy = f(x) \text{ entonces } y = \int f(x) dx$$

en donde es obvio que  $y$  es una integral de  $f(x)$ ; el factor  $dx$  para nosotros, indica la variable única que deba aparecer a la derecha del signo integral para poder efectuar el proceso, a la que nos referiremos como variable independiente o variable de integración, mientras que a la expresión representada por  $f(x)$  se le llama el integrando.

Después de lo que se ha visto en el párrafo anterior concluimos que:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

donde  $F$  es cualquier función que tiene por derivada a  $f$ ,  $C$  puede ser cualquier constante.

Estas integrales que contienen una constante no determinada, son conocidas como integrales indefinidas.

**Integral  
indefinida**

Al inicio del tema, bosquejamos el proceso para determinar la integral de una función potencial; justifiquemos ahora dicho proceso

**Teorema:**

Para todo  $n \in \mathbb{R}$  excepto  $n = -1$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Llevar a cabo el proceso, consistirá en a) agregar una unidad al exponente  $n$ , b) multiplicar por el recíproco (dividir) del nuevo exponente  $(n+1)$  y finalmente c) agregar la constante  $c$  a la que llamaremos constante de integración.

**Justifiquemos  
el proceso de  
integración**

**Demostración:**

$$D \left[ \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) + c \right] = D \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) + Dc \quad \text{Derivada de una suma}$$

$$= D \frac{1}{n+1} x^{n+1} + Dc \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$$

$$= \frac{1}{n+1} D x^{n+1} + Dc \quad Dc f(x) = c Df(x)$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) x^n + 0 \quad \text{Derivando}$$

$$= x^n$$



La pregunta obvia es ¿qué sucede cuando  $n = -1$  en la expresión  $\int x^n dx$ ?

Si  $n = -1$   $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx$ , el problema es determinar alguna función que tenga por derivada a  $\frac{1}{x}$  y como

**Si el exponente es -1**

$D \log_e x = \frac{1}{x}$  entonces  $\log_e x = \int \frac{1}{x} dx$  por lo que

$$\int x^{-1} dx = \log_e x + c$$

**La integral de la función exponencial es...**

En el caso de la función exponencial  $e^x$

$D e^x = e^x$  por lo que  $e^x = \int e^x dx$ , si  $Dy = f(x)$ ,  
 $y = \int f(x) dx$

$$y = \int e^x dx = e^x + c$$

En el caso de las funciones circulares tenemos:

**También las funciones circulares se integran**

Si  $D \sin x = \cos x$ , luego  $\sin x = \int \cos x dx$

$$Dy = f(x) \Rightarrow y = \int f(x) dx$$

$$\text{luego } \int \cos x dx = \sin x + c$$

De igual manera

$D \cos x = -\sin x$ , luego  $-\cos x = \int \sin x dx$  por lo que

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

Dos teoremas cuya aplicación simplifica el proceso que está aprendiendo y que serán empleados posteriormente, se presentan a continuación.

**Teorema:**

Si la integral de una función  $f$  existe, dicho de otra manera si  $\int f(x) dx$  existe, entonces

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

El teorema nos expresa que si el integrando tiene un factor constante, este factor puede quitarse del integrando y escribirse a la izquierda del signo integral  $\int$

$$\int 7x^3 dx = 7 \int x^3 dx$$

$$\int 5(x^2 + 3) dx = 5 \int (x^2 + 3) dx$$

Teorema:

**Integral de la suma de funciones**

Si las integrales de las funciones  $f$  y  $g$  existen, esto es, si  $\int f(x) dx$  y  $\int g(x) dx$  existen entonces:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

El teorema nos expresa que la integral de una suma es igual a la suma de las integrales de los sumandos.

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 5x - 3) dx &= \int x^2 dx + \int 5x dx - \int 3 dx = \\ &= \int x^2 dx + 5 \int x dx - 3 \int dx \end{aligned}$$

Teorema:

Si  $D(x + c) = dx$ , luego  $\int dx = x + c$



Ejemplo 1

Encuentre la integral  $\int (3x^5 - 4x + \frac{2}{x}) dx$

Solución:

$$\int (3x^5 - 4x + \frac{2}{x}) dx = \int 3x^5 dx + \int -4x dx + \int \frac{2}{x} dx$$

$$= 3 \int x^5 dx - 4 \int x dx + 2 \int x^{-1} dx$$

$$= 3 \frac{x^6}{6} - 4 \frac{x^2}{2} + 2 \log_e x + c$$

$$= \frac{x^6}{2} - 2x^2 + 2 \log_e x + c$$

La constante  $c$  representa a la suma de  $c_1 + c_2 + c_3$  que son las constantes de integración de los tres sumandos del integrando original.



### Ejemplo 2

Determine la integral  $\int (3x - 4)^2 dx$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \int (3x - 4)^2 dx &= \int (9x^2 - 24x + 16) dx \\
 &= \int 9x^2 dx - \int 24x dx + \int 16 dx \\
 &= 9 \int x^2 dx - 24 \int x dx + 16 \int dx \\
 &= 3x^3 - 12x^2 + 16x + c
 \end{aligned}$$



### Ejemplo 3

Determine la integral  $\int \frac{2x - 3}{x^2} dx$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x - 3}{x^2} dx &= \int (2x - 3) x^{-2} dx \\
 &= \int (2x^{-1} - 3x^{-2}) dx \\
 &= \int 2x^{-1} dx - \int 3x^{-2} dx \\
 &= 2 \int x^{-1} dx - 3 \int x^{-2} dx \\
 &= 2 \log_e x + 3x^{-1} + c
 \end{aligned}$$

### REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Determine cada una de las siguientes integrales indefinidas. La comprobación de cada resultado la efectuará derivando dicho resultado.

1.  $\int (x^2 + 2) dx$
2.  $\int (x^3 - 3x^2 + x) dx$
3.  $\int (x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}) dx$

$$4. \int \frac{2x^4 - 3x^2 + 2x}{x^{-2}} dx$$

$$5. \int \left( \frac{1}{x} - 2 \right)^2 dx$$

$$6. \int (2x - 3)^2 dx$$

$$7. \int (x - 2)^3 dx$$

$$8. \int \frac{dx}{\csc x}$$

$$9. \int \frac{dx}{\sec x}$$

$$10. \int \left( \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx$$

NOTA:  $\cos 2\alpha \equiv \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$$11. \int (x^{-4} + 1) dx$$

$$12. \int (x + \sqrt{x}) dx$$

$$13. \int \frac{x^2 + 5x + 6}{\sqrt{x}} dx$$

$$14. \int \frac{dx}{2x}$$

$$15. \int 3 e^x dx$$

$$16. \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}} dx$$

$$17. \int (x + 1)(x - 2) dx$$

Recuerde que la integral de un producto **NO** es el producto de **las integrales** de los factores.

$$18. \int \sin x \cot x dx$$

$$19. \int \cos x \operatorname{tg} x dx$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$$



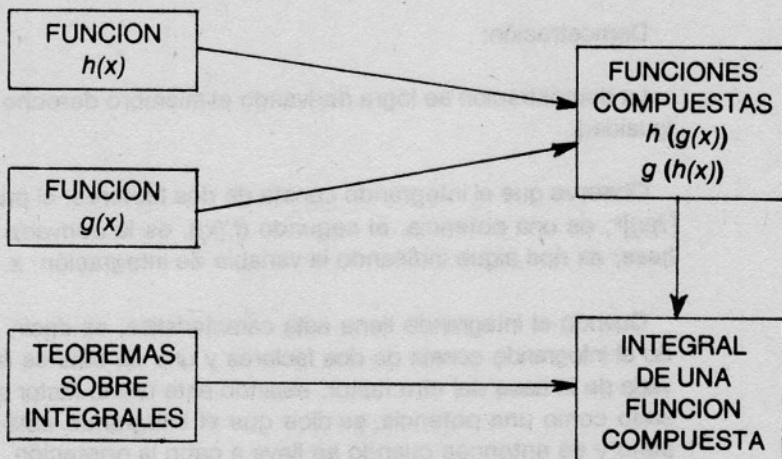
# Módulo 14

## OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Explicará por qué el proceso de integración conduce a una expresión cuya derivada es el integrando.
2. Determinará la integral de una función compuesta dada, en la cual el integrando consta de dos factores, uno de ellos en la forma potencial y el otro es la derivada de la base.

## ESQUEMA RESUMEN



## 14.1 Integrales de funciones compuestas

Sea  $h$  una función compuesta definida por  $h(x) = f(g(x))$ ;

si  $Dh(x) = f'(g(x)) g'(x)$  entonces  $h(x) = \int f'(g(x)) g'(x) dx$

Este enunciado es una generalización del expresado en la lección anterior.

Si  $Dy = f(x)$  entonces  $y = \int f(x) dx$

El proceso de integración nos conduce a una expresión cuya derivada es el integrando.

Consideremos inicialmente el caso en el que la función compuesta es una función potencial.

Teorema:

Si  $n \neq -1$  entonces

**Integral de  
una función  
potencial**

$$\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + C$$

Demostración:

La demostración se logra derivando el miembro derecho de la igualdad.

Observe que el integrando consta de dos factores; el primero  $[f(x)]^n$ , es una potencia, el segundo  $(f'(x))$ , es la *derivada de la base*;  $dx$  nos sigue indicando la variable de integración  $x$ .

Cuando el integrando tiene esta característica, es decir, cuando el integrando consta de dos factores y uno de ellos es la derivada de la base del otro factor, estando este último factor expresado como una potencia, se dice que el integrando está completo y es entonces cuando se lleva a cabo la operación.



Ejemplo 1

Determine la integral  $\int \sqrt{x^2-9} \cdot 2x dx$

Solución:

El integrando consta de los factores  $\sqrt{x^2-9}$  y  $2x$ ;  $\sqrt{x^2-9}$

se pásala a la forma exponencial y queda

$$\int (x^2-9)^{\frac{1}{2}} 2x \, dx \text{ en donde}$$

$$[f(x)]^n = (x^2-9)^{\frac{1}{2}}; \quad f(x) = x^2-9; \text{ y } f'(x) = 2x$$

$$\text{por lo que } \int [x^2-9]^{\frac{1}{2}} 2x \, dx = \frac{2}{3} (x^2-9)^{\frac{3}{2}} + C$$

Ejemplo 2

$$\text{Integrar } \int (x^2-4x+3)^3 (x-2) \, dx$$

Solución:

$$\text{Si hacemos } f(x) = x^2-4x+3,$$

$$f'(x) = 2x-4 = 2(x-2)$$

Obviamente el integrando no está completo; pero si lo multipli-

camos por  $\frac{2}{2}$  se elimina la dificultad.

$$\int (x^2-4x+3)^3 (x-2) \, dx = \int \frac{(x^2-4x+3)^3 2(x-2) \, dx}{2}$$

Dado que una constante puede "salir" a la izquierda del signo integral, quitamos del integrando al 2 denominador y queda

$$\frac{1}{2} \int (x^2-4x+3)^3 2(x-2) \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (x^2-4x+3)^4 + C$$

finalmente

$$\int (x^2-4x+3) (x-2) \, dx = \frac{1}{8} (x^2-4x+3)^4 + C$$



De la misma forma que en los casos anteriores

como

$$D \log_e f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ entonces } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log_e f(x) + C$$

Ejemplo 3

$$\text{Integrar } \int \frac{1}{1+x} dx$$

Solución:

Si hacemos  $f(x) = 1 + x$  entonces  $f'(x) = 1$ , por lo que

$$\int \frac{1}{1+x} dx \text{ es de la forma } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$\text{entonces } \int \frac{1}{1+x} dx = \log_e (1+x) + C$$

Ejemplo 4

$$\text{Integrar } \int \frac{\cos x}{\sen x} dx = \int \cot x dx$$

Solución:

si hacemos  $f(x) = \sen x$ , resulta  $f'(x) = \cos x$

$$\text{entonces } \int \frac{\cos x}{\sen x} dx = \log_e \sen x + C$$

Ejemplo 5

$$\text{Integrar } \int \frac{2}{1-2x} dx$$

Solución:

$$\int \frac{2}{1-2x} dx = -\int \frac{-2}{1-2x} dx$$

$$= -\log_e (1-2x) + C$$



También como

$$De^{g(x)} = g'(x)e^{g(x)} \text{ tenemos que } \int e^{g(x)} g'(x) dx = e^{g(x)} + C$$

Ejemplo 6

Determinar  $\int e^{x^2} 2x dx$

Solución:

haciendo  $g(x) = x^2$  resulta  $g'(x) = 2x$  entonces  $\int e^{x^2} 2x dx$  es de la forma  $\int e^{g(x)} g'(x) dx$ , luego  $\int e^{x^2} 2x dx = e^{x^2} + C$

Ejemplo 7

Determinar  $\int e^{-x} dx$

Solución:

$$\int e^{-x} dx = -\int e^{-x} (-1) dx$$

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$

Dado que

$D \sin g(x) = g'(x) \cos g(x)$ , entonces

$$\int \cos g(x) \cdot g'(x) dx = \sin g(x) + C$$

y como  $D \cos g(x) = -\sin g(x) g'(x)$ , tenemos que

$$\int \sin g(x) \cdot g'(x) dx = -\cos g(x) + C$$

Ejemplo 8

Determinar  $\int \sin 4x \cdot 4 dx$

Solución:

haciendo  $g(x) = 4x$  resulta  $g'(x) = 4$ , por lo que el integrando está completo y entonces

$$\int \sin 4x \cdot 4 dx = -\cos 4x + C$$

### Ejemplo 9

Determinar  $\int \cos 3x^2 \cdot x \, dx$

Solución:

Si  $g(x) = 3x^2$ ,  $g'(x) = 6x$ ; para completar el integrando es necesario multiplicar por  $(\frac{1}{6} \cdot 6)$ .

$$\begin{aligned}\int \cos 3x^2 \cdot x \, dx &= \frac{1}{6} \int \cos 3x^2 \cdot 6x \, dx \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{sen} 3x^2 + C\end{aligned}$$

### REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Determine las siguientes integrales:

1.  $\int (x^3-3)^2 3x^2 \, dx$
2.  $\int (x^3-3)^2 x^2 \, dx$
3.  $\int x \sqrt{x^2-3} \, dx$
4.  $\int \frac{1}{1-x} \, dx$
5.  $\int \frac{x}{4-x^2} \, dx$
6.  $\int x^{-\frac{1}{3}} (x^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}})^2 \, dx$
7.  $\int (x^2-10x)^7 (x-5) \, dx$
8.  $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx$
9.  $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$
10.  $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \, dx$

$$11. \int \operatorname{sen} 5x \, dx$$

$$12. \int \cos 3x \, dx$$

$$13. \int \frac{3}{3x-1} \, dx$$

$$14. \int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} \, dx$$

$$15. \int \frac{3 + \log_e x}{x} \, dx$$

$$16. \int \frac{1}{x} (\log_e x)^3 \, dx$$

$$17. \int (e^{-x} + e^x)^2 \, dx$$

$$18. \int \frac{e^x}{e^x + 5} \, dx$$

$$19. \int e^{3x^2} x \, dx$$

$$20. \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{-x^2} \, dx$$

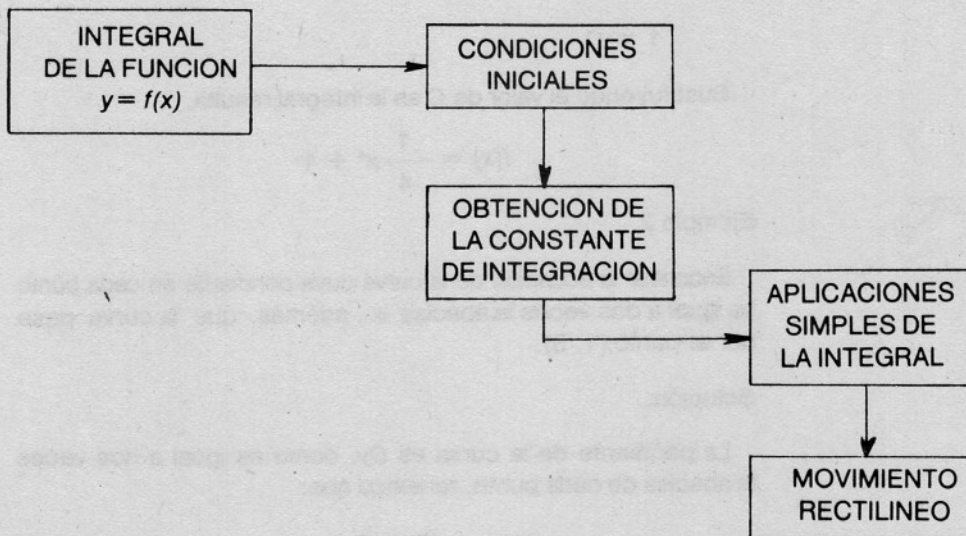
# Módulo 15

## OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo , el alumno:

1. Obtendrá el valor de la constante de integración de una función, a partir de las condiciones iniciales.
2. Determinará completamente una integral a partir de las componentes de un par ordenado (condiciones iniciales).
3. Definirá el concepto de aceleración en un movimiento rectilíneo.
4. Resolverá problemas sobre el movimiento rectilíneo de un cuerpo, empleando el concepto de integral.

## ESQUEMA RESUMEN





**Obtención del  
valor de la  
constante de  
integración**



## 15.1 Aplicaciones simples de la integral

Hemos mostrado que el proceso de integración como lo conocemos conduce a la obtención de una constante indefinida que se ha representado por  $C$ , si queremos determinar completamente la integral, debemos obtener un valor particular de  $C$ ; para lograrlo debemos conocer un par ordenado de la función obtenida. Las componentes de dicho par ordenado se conocen como *condiciones iniciales*.

### Ejemplo 1.

Determine la función cuya derivada es  $x^3$ , de tal forma que cuando  $x = 2$ ,  $f(x) = 5$ .

Solución:

Sabemos que  $Df(x) = x^3$ , entonces  $f(x) = \int x^3 dx$

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + C$$

Para  $x = 2$ , y  $f(x) = 5$ . sustituyendo estos valores tenemos:

$$5 = \frac{2^4}{4} + C$$

$$1 = C$$

Sustituyendo el valor de  $C$  en la integral resulta,

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 1.$$



### Ejemplo 2.

Encontrar la ecuación de la curva cuya pendiente en cada punto es igual a dos veces la abscisa  $x$ , además, que la curva pase por el punto  $(1, 3)$ .

Solución:

La pendiente de la curva es  $Dy$ , como es igual a dos veces la abscisa de cada punto, tenemos que:

$$Dy = 2x$$

Por lo que

$$y = \int 2x \, dx$$

$$y = x^2 + C$$

Sustituyendo las coordenadas del punto (1, 3) tenemos

$$3 = 1^2 + C$$

$$2 = C$$

$$y = x^2 + 2$$

Ejemplo 3.

Determine la ecuación de una curva en la que para cada punto  $y'' = 6x - 2$  y pasa por el punto (2, 1) con una inclinación de  $135^\circ$ .



Solución:

Si  $y'' = 6x - 2$  entonces  $y' = \int (6x - 2) \, dx$

$$y' = 3x^2 - 2x + C_1$$

$y'$  es la pendiente de la curva; ésta a su vez es la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto; la pendiente de la tangente en el punto (2, 1) es  $m = y' = \tan 135^\circ = -1$ , entonces si  $x = 2$ ,  $y' = -1$ . Sustituyendo estos valores en

$$y' = 3x^2 - 2x + C_1 \text{ tenemos}$$

$$-1 = 12 - 4 + C_1 \text{ de donde}$$

$$C_1 = -9, \text{ entonces}$$

$$y' = 3x^2 - 2x - 9$$

ahora, si  $y' = 3x^2 - 2x - 9$  entonces  $y = \int (3x^2 - 2x - 9) \, dx$   
por lo que

$$y = x^3 - x^2 - 9x + C_2$$

La curva pasa por (2, 1) entonces si  $x = 2$ ,  $y = 1$ , sustituyendo estos valores en la última ecuación queda:

$$1 = 8 - 4 - 18 + C_2$$

$$C_2 = 15 \quad \text{finalmente}$$

$$y = x^3 - x^2 - 9x + 15$$

## 15.2 Movimiento rectilíneo

**El movimiento se puede representar por una ecuación**

Ha aprendido que cuando un móvil se desplaza sobre una recta, el movimiento queda descrito por una ecuación de la forma  $S = f(t)$  donde  $S$  representa la separación entre el móvil y el punto  $O$  elegido como origen en el instante de tiempo indicado por  $t$ . También se mostró que la velocidad en un instante determinado se obtiene derivando  $S = f(t)$ , es decir  $v = f'(t)$ , o bien  $D_t S = v$ .

Como  $D_t S = v$  entonces  $s = \int v dt$ . Para efectuar el proceso indicado por  $\int$ , es necesario que el integrando  $x$  sea expresado en términos de  $t$  como lo indica el factor  $dt$ ; esto se entiende dado que tanto el desplazamiento  $s$  como la velocidad  $v$  dependen del tiempo  $t$ . Podemos concretar diciendo que  $t$  es la variable independiente, o bien la variable de integración.

Definición:

**Aceleración**

En el movimiento rectilíneo, la aceleración  $a$  de un móvil en un instante dado es la razón de cambio de su velocidad con respecto al tiempo.

**La derivada de la velocidad con respecto al tiempo, es...**

Como la *razón de cambio* de la velocidad con respecto al tiempo es la *derivada* de la velocidad con respecto al tiempo, entonces:

$$D_t v = a \quad \text{implica} \quad v = \int a dt$$

En  $a dt$ , el factor  $dt$  sigue indicando que  $t$  es la variable de integración, el integrando  $a$ , cuando es variable debe expresarse en términos de  $t$ .

\* En  $D_t S$ , el subíndice  $t$  significa que  $t$  es la variable independiente.

\*\* En  $D_t v$ , el subíndice  $t$  significa que  $t$  es la variable independiente.

sarse en términos de  $t$ ; si  $a$  (aceleración) es constante, o sea que el movimiento es uniformemente acelerado, no existe problema para integrar.

Ejemplo 1.

Describir el movimiento de un cuerpo bajo la acción de la gravedad.

Solución:

Consideraremos como origen el punto del suelo en el que pegará el cuerpo. (Ver Figura 1).

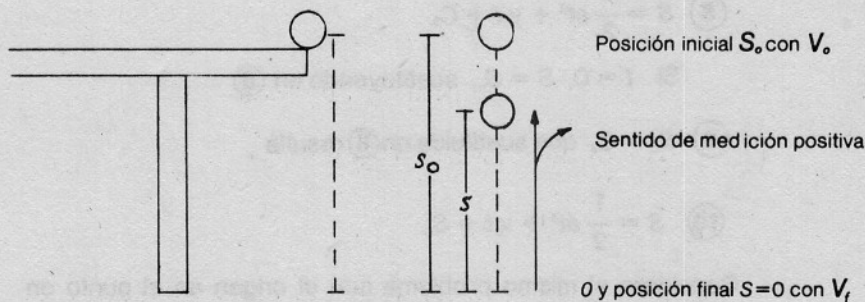


Figura 1

Y hacia arriba el sentido positivo de medición; en este caso la aceleración es constante,  $a = -9.8 \frac{m}{seg^2}$ . El signo negativo significa que "el sentido" de la gravedad es opuesto al que hemos escogido como positivo, y también que la velocidad es una función decreciente.

$$\textcircled{1} D_t v = a$$

$$\textcircled{2} v = \int a dt$$

$$\textcircled{3} v = at + C_1$$

Para determinar  $C_1$  recurrimos a las condiciones iniciales que aquí son las que imperan cuando  $t=0$ ; en este instante en que se inicia el movimiento, la velocidad del cuerpo es su velo-



cidad inicial que se representa por  $v_0$ , entonces si  $t=0$ ,  $v=v_0$ , sustituyendo en 3 tenemos.

④  $v_0 = C_1$  que sustituida en ③ da

⑤  $v = at + v_0$

⑥  $S = \int v dt$  sustituyendo ⑤ en ⑥ resulta

⑦  $S = \int (at + v_0) dt$

⑧  $S = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + C_2$

Si  $t = 0$ ,  $S = S_0$ , sustituyendo en ⑧

⑨  $S_0 = C_2$  que sustituida en ⑧ resulta

⑩  $S = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + S_0$

Considere el mismo problema con el origen en el punto en donde se inicia el movimiento. ¿Cuáles son las ecuaciones que describen el movimiento?

### REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Determine en cada caso la ecuación de la curva que tiene en cada punto la pendiente dada y pasa por el punto indicado.

1.  $Dy = \sqrt{x}$  (1, 2)

2.  $Dy = \sqrt{4-x}$  (0, 4)

3.  $Dy = 3x$  (0, 2)

4.  $Dy = 3x^2 - 2$  (3, 1)

5.  $Dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$  (0, 2)

6.  $Dy = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$  (0, 6)

$$7. \quad Dy = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (1, 2)$$

$$8. \quad Dy = e^x \quad (0, 2)$$

9. En cada punto de una curva  $D^2y = -2$ , determine la ecuación de dicha curva si pasa por  $(-3, -2)$  y su pendiente en ese punto es 1.
10. Encuentre la ecuación de una curva que pasa por  $(-2, 1)$ ; su pendiente en ese punto, es  $-1$ , además para cada punto de la curva  $D^2y = \frac{8}{x^3}$ .
11. En cada punto de una curva  $D^2y = 3x$ . Además la curva es tangente a la recta  $2x + 3y + 3 = 0$  en el punto  $(0, -1)$ . Encuentre la ecuación de la curva.
12. Determine la ecuación de la curva para la cual  $D^2y = 10\sqrt{x}$  pasa por el punto  $(4, 0)$  con una inclinación de  $45^\circ$ .

Usando el proceso visto en los ejemplos, resuelva los siguientes problemas.

13. Un objeto cae desde una altura de  $490 \text{ m}$ . a) ¿cuánto tiempo tarda en caer al suelo? b) ¿con qué velocidad pega contra el suelo?
14. Un objeto que es soltado desde una altura  $h$  tarda  $8$  segundos en llegar al suelo. ¿De qué altura fue soltado y con qué velocidad llega al suelo?
15. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de  $49 \text{ m/seg}$ . ( $V_0 = 49 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ ), ¿En qué instante alcanza su altura máxima y cuál es dicha altura?
16. Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba desde un punto a  $343 \text{ m}$ . del suelo con una velocidad inicial de  $19.6 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ . a) ¿cuál es la altura máxima (respecto del suelo)?, b) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar la altura máxima? c) ¿Cuánto tiempo, desde que se inicia el movimiento, tarda en llegar al suelo?
17. Si en el problema 13, el objeto es arrojado hacia abajo con una velocidad inicial de  $102.9 \text{ m/seg}$ , ¿cuánto tiempo tarda en llegar al suelo y con qué velocidad lo hace?

18. Un punto se mueve sobre una recta con velocidad  $v = 3t - 5$ ; si  $S = 6$  cuando  $t = 4 \text{ seg}$ , ¿cuánto vale  $S$  si  $t = 2 \text{ seg}$ ?
19. Un punto que se desplaza sobre una recta con aceleración  $a = 3t - 3$ , cuando  $t = 1 \text{ seg}$ ,  $S = 6 \text{ m}$  y cuando  $t = 2 \text{ seg}$ ,  $S = 10 \text{ m}$ , ¿cuál es la velocidad del punto cuando  $t = 4 \text{ seg}$ ?

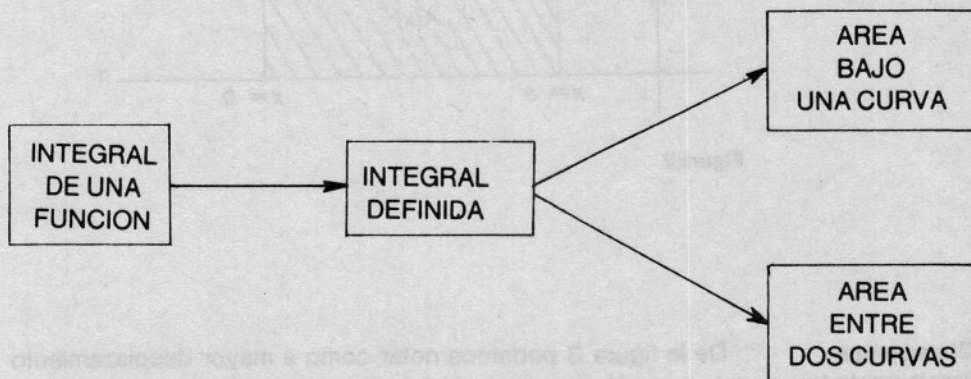
# Módulo 16

## OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Explicará el concepto de integral definida.
2. Calculará el área limitada por una curva, el eje  $X$  y dos rectas verticales, aplicando el concepto de integral definida.
3. Explicará la interpretación del signo negativo en la determinación de áreas.
4. Determinará el área comprendida entre dos curvas de ecuaciones dadas.

## ESQUEMA RESUMEN





## 16.1 Área bajo una curva

Uno de los objetivos es el cálculo de áreas

La función deberá ser continua

El área es una función de  $x$

Una de las principales aplicaciones de la integración es determinar o calcular áreas; el objetivo de este módulo es mostrarle cómo encontrarlas y comenzaremos por considerar el área limitada por una curva, el eje  $X$  y dos rectas verticales.

Sea  $y = f(x)$ , la ecuación de una función continua en el intervalo  $a \leq x \leq b$  cuya gráfica aparece en la figura 2. En la misma figura se muestra también el área comprendida entre la curva con ecuación  $y = f(x)$  el eje  $X$ , la recta con ecuación  $x = a$  y la recta con ecuación  $x = b$ ; supondremos que dicha área es generada por el desplazamiento horizontal de un segmento de recta vertical cuya longitud está dada por  $f(x)$ , o sea que en cada posición el segmento coincide con la ordenada correspondiente. Considerada de esta manera, el área depende de  $x$  y la representaremos por  $A(x)$ , esto es  $A$  es una función cuyo dominio es tal que  $a \leq x \leq b$ .

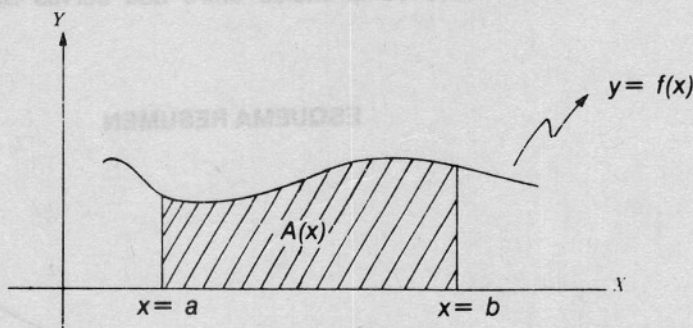


Figura 2

Observemos atentamente las figuras

De la figura 3 podemos notar cómo a mayor desplazamiento del segmento generador del área corresponde mayor área. Así, en la primera gráfica el desplazamiento es cero por lo que el área generada es igual a cero; en la segunda y en la tercera gráfica podemos notar que  $x_2 > x_1$  y que  $A(x_2) > A(x_1)$ .

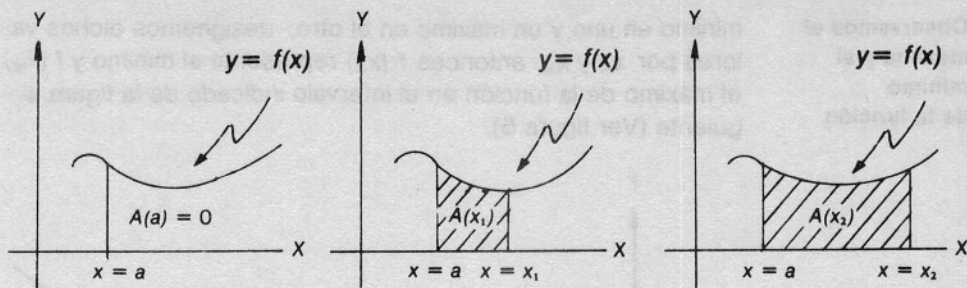


Figura 3

Mostraremos ahora que  $A'(x) = f(x)$ .

Consideremos un valor fijo  $x_1$ , contenido en  $a \leq x \leq b$ , y otro valor variable  $x$  contenido en el mismo intervalo tales que  $x > x_1$ , entonces  $A(x) > A(x_1)$  (Ver figura 4).

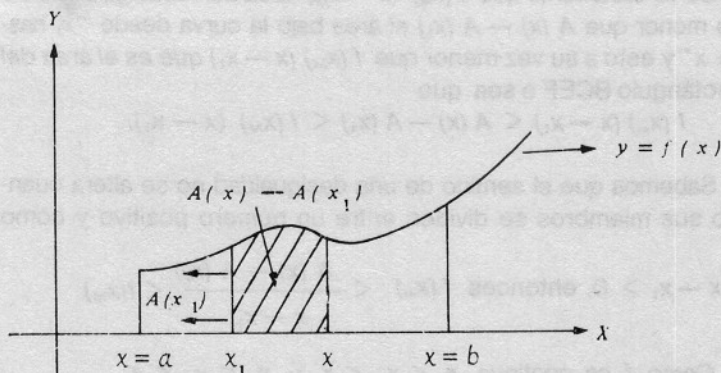


Figura 4

El área encerrada bajo la curva, sobre el eje  $X$  entre  $x_1$  y  $x$  está dada por  $A(x) - A(x_1)$ . Es decir al área a la izquierda del valor  $x$  se le quita el área a la izquierda de  $x_1$ .

**El área bajo la curva depende del intervalo**

Debemos aceptar que para toda función continua en un intervalo  $a \leq x \leq b$  como es el caso que estamos considerando, existen dos valores de  $x$  para los cuales la función adopta un

Observemos el máximo y el mínimo de la función

mínimo en uno y un máximo en el otro; designemos dichos valores por  $x_m$  y  $x_M$ , entonces  $f(x_m)$  representa el mínimo y  $f(x_M)$  el máximo de la función en el intervalo indicado de la figura siguiente (Ver figura 5).

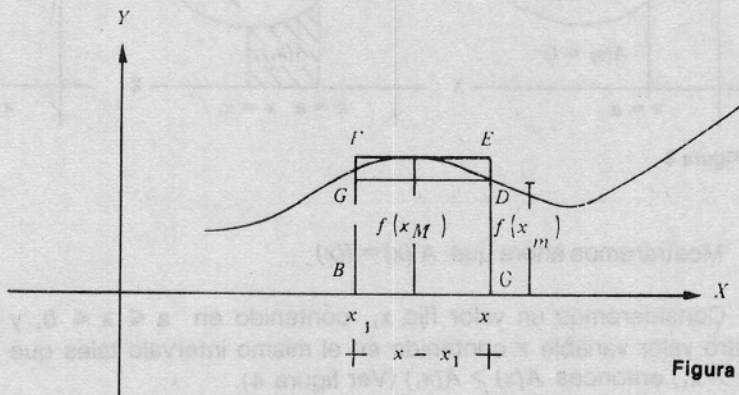


Figura 5

Se ve claramente que  $f(x_m)(x - x_1)$ , área del rectángulo BCDG es menor que  $A(x) - A(x_1)$  el área bajo la curva desde  $x_1$  hasta  $x$  y esto a su vez menor que  $f(x_M)(x - x_1)$  que es el área del rectángulo BCEF o sea que

$$f(x_m)(x - x_1) < A(x) - A(x_1) < f(x_M)(x - x_1).$$

Considerando la propiedad de las desigualdades

Sabemos que el sentido de una desigualdad no se altera cuando sus miembros se dividen entre un número positivo y como

$$x - x_1 > 0, \text{ entonces } f(x_m) < \frac{A(x) - A(x_1)}{x - x_1} < f(x_M)$$

$$\text{Como } f \text{ es continua } x_1 \leq x_m \leq x \text{ y } x_1 \leq x_M \leq x$$

Si hacemos que  $x$  tienda a  $x_1$  tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow x_1} f(x_m) = f(x_1) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow x_1} f(x_M) = f(x_1)$$

Por lo que, dado que los límites de los extremos son iguales

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{A(x) - A(x_1)}{x - x_1} = f(x_1) \quad a \leq x_1 \leq b$$

pero  $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{A(x) - A(x_1)}{x - x_1} = A'(x_1)$  como  $x_1$  es un valor cualquiera, se tiene que:

$$A'(x) = f(x)$$

y si  $A'(x) = f(x)$ , entonces  $A(x) = \int f(x) dx$ .

Sea  $\int f(x) dx = g(x) + c$ , luego  $A(x) = g(x) + C$ , si nuestro problema es determinar el área bajo la curva desde  $x = a$  hasta  $x = b$  es necesario determinar el valor de  $c$ ; para ello recurrimos a las condiciones iniciales que en este caso son: si  $x = a$  entonces  $A(a) = 0$ , sustituyendo en  $A(x) = g(x) + C$  resulta

$$0 = g(a) + C \text{ por lo que } C = -g(a) \text{ entonces}$$

$$A(x) = g(x) - g(a)$$

Esta igualdad expresa el área bajo la curva  $y = f(x)$ ; sobre el eje  $X$  desde "a hasta  $x$ " (Ver figura 6).

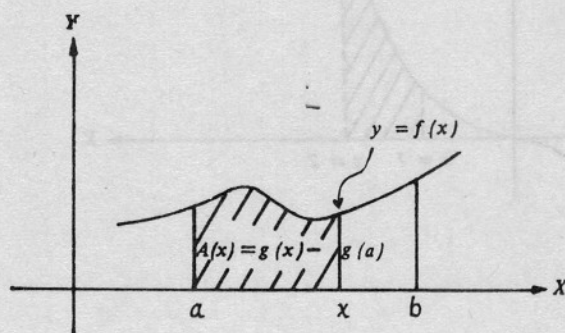


Figura 6

Si hacemos  $x = b$ , tenemos  $A(b) = g(b) - g(a)$  que representa el área bajo la curva sobre el eje  $X$  desde  $x = a$  hasta  $x = b$ .

El proceso que acaba de realizarse, es sumamente importante y se presenta con tal frecuencia en las diversas aplicaciones de

**Obtenemos el  
área bajo la  
curva**



la integración, que se le asigna un nombre y una notación especial.

$$\text{Si } g'(x) = f(x), \int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a)$$

### Integral definida

### Límites de Integración



### Determinación del área bajo una curva

es conocida como la *integral definida* de  $f$ , desde  $a$  hasta  $b$ ; se acostumbra llamar a  $a$  el límite inferior y  $b$  límite superior de integración. Es costumbre también indicar el proceso así:

$$A = \int_a^b f(x) dx = g(x) \Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

### Ejemplo 1

Determine el área bajo la curva  $y = x^3$  desde  $x = 1$ , hasta  $x = 2$  (Ver figura 7).

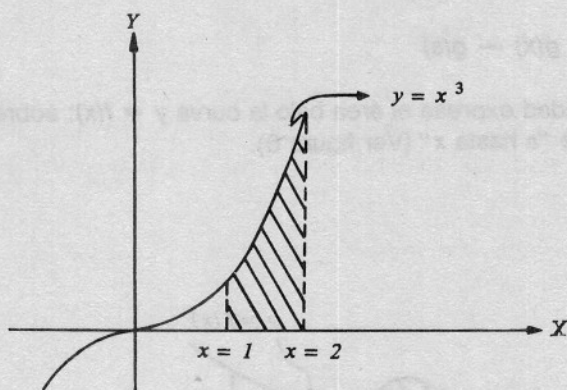


Figura 7

Solución:

El área bajo la curva es  $A(x) = \int_a^b f(x) dx$ , en donde los límites de integración son  $x = 1$  y  $x = 2$ .

$$A = \int_1^2 x^3 dx$$

$$A = \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^2$$

$$A = \frac{1}{4} (2)^4 - \frac{1}{4} (1)^4$$

$$A = \frac{16}{4} - \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{15}{4}$$

### Ejemplo 2

¿Cuál es el área comprendida entre la curva  $y = x^3$  y el eje  $x$ , desde  $x = -2$  hasta  $x = -1$  ?

Solución:

$$A = \int_{-2}^{-1} f(x) dx = \int_{-2}^{-1} x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_{-2}^{-1} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}$$

Evidentemente no concebimos áreas negativas; la interpretación que daremos a este resultado es que el área en cuestión se localiza en una región en la que  $f(x) < 0$ .

Este hecho nos puede llevar a situaciones como la que describe el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 3

Determine el área comprendida entre la curva  $y = \sin x$  y el eje  $x$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 2\pi$  (Ver figura 8).

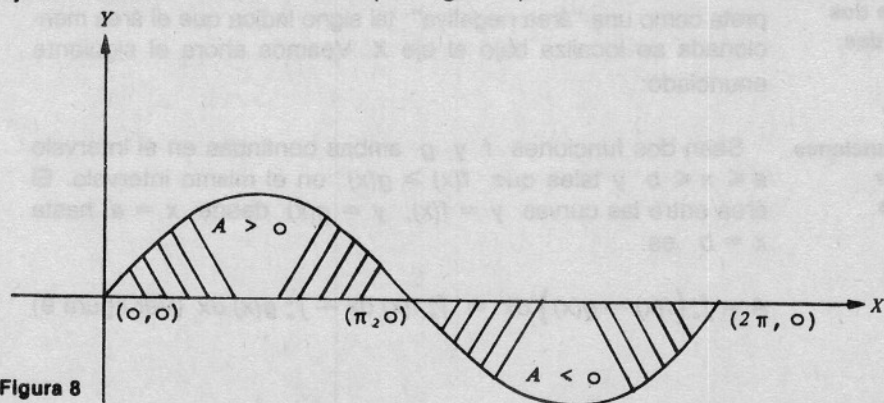


Figura 8

Solución:

$$\text{si } A = \int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = 1 - 1 = 0$$

Es obvio que el área entre la curva y el eje  $X$  no es cero. El resultado se interpreta diciendo que el área situada por encima del eje  $X$  es igual al área localizada por abajo del eje horizontal; para determinar el área pedida se busca por separado la magnitud del área encima de  $X$  y el área debajo del eje  $X$ , así

$$A = \int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx$$

y se consideran los valores absolutos de ambas integrales

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = \\ &= -\cos x \Big|_0^{\pi} + (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= -(-1-1) + [-(1-(-1))] = 2 + |-2| \\ &= 4 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

## 16.2 Área entre dos curvas

**También podemos determinar el área entre dos curvas dadas**

Ha aprendido que una de las aplicaciones de la integral consiste en considerarla un área. También ha aprendido que si una área queda representada por un número negativo, esto *no* se interpreta como una "área negativa". tal signo indica que el área mencionada se localiza bajo el eje  $X$ . Veamos ahora el siguiente enunciado:

**Ambas funciones deben ser continuas**

Sean dos funciones  $f$  y  $g$  ambas continuas en el intervalo  $a \leq x \leq b$  y tales que  $f(x) \geq g(x)$  en el mismo intervalo. El área entre las curvas  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  desde  $x = a$  hasta  $x = b$  es:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \quad (\text{Ver figura 9})$$

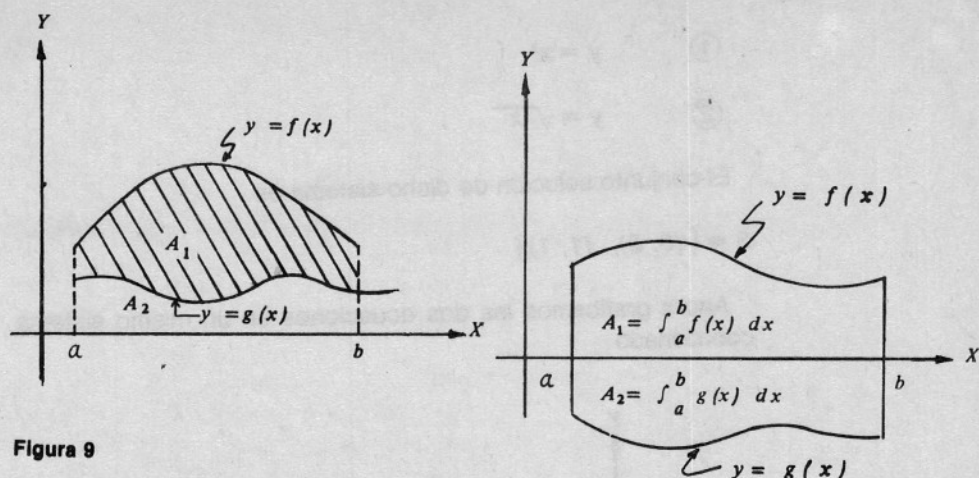


Figura 9

La primera gráfica ilustra dos posibilidades que se reducen a una; ambas áreas están del mismo lado del eje  $X$  por lo que son del mismo signo; en este caso el enunciado es evidente puesto que la primera integral representa el área entre  $y = f(x)$  y  $X$ , la segunda integral es el área entre  $y = g(x)$  y  $X$ , siendo la diferencia obviamente el área entre las dos curvas.

La segunda gráfica ilustra el caso en que las integrales representen áreas situadas en lados opuestos del eje  $X$ , por lo que una de ellas es un número positivo ( $\int_a^b f(x) dx > 0$ ) y la otra queda expresada por medio de un número negativo

$$\left( \int_a^b g(x) dx < 0 \right)$$

Entonces, la diferencia  $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$  es en realidad la suma de las dos áreas:  $A_1 + A_2$ ; con esto se cubren todas las posibilidades y queda "mostrado" el teorema.

### Ejemplo 1

Determine el área comprendida entre las curvas cuyas ecuaciones son  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$

Solución:

Como primer paso encontramos los puntos de intersección entre las curvas resolviendo el sistema de ecuaciones.

¿Como interpretamos un área negativa?





$$\textcircled{1} \quad y = x^2$$

$$\textcircled{2} \quad y = \sqrt{x}$$

El conjunto solución de dicho sistema es

$$S = \{ (0, 0), (1, 1) \}$$

Ahora graficamos las dos ecuaciones en un mismo sistema coordenado

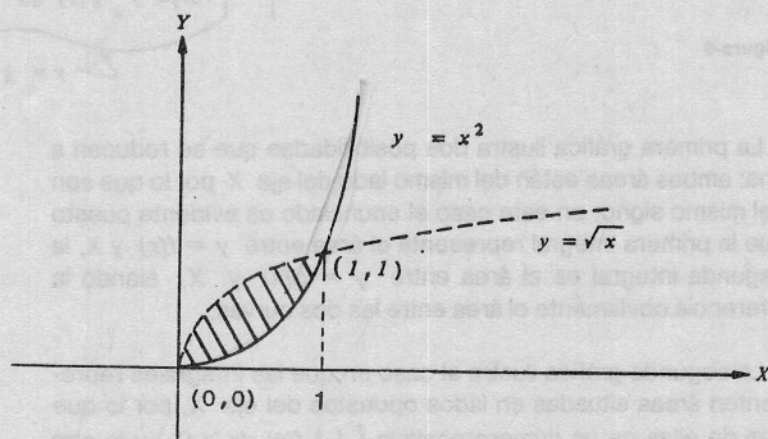


Figura 10

Y señalamos el área cuyo valor queremos determinar; una pequeña observación nos permite darnos cuenta de que la curva con ecuación  $y = \sqrt{x}$  está "arriba" de la curva con ecuación  $y = x^2$  en el intervalo  $(0 \leq x \leq 1)$  cuyos extremos son los límites de integración, entonces

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$$

$$= \left( \frac{2}{3} x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1$$

$$= \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) - (0 - 0) = \frac{1}{3} \text{ por lo que}$$

$$A = \frac{1}{3} u^2$$

### REACTIVOS DE AUTOEVALUACION

Determine el área limitada por la curva cuya ecuación se da y el eje  $X$  entre los límites dados.

1.  $y = x^2$ ,  $x = 0$  hasta  $x = 4$
2.  $y = \sqrt{2x}$ ,  $x = 2$  hasta  $x = 8$
3.  $y = 9x - x^3$ , desde  $x = 0$  hasta  $x = 3$
4.  $y = 8x - x^2$  desde  $x = 4$  hasta  $x = 8$
5.  $y = \sqrt{4-x}$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 4$
6.  $y = \sqrt{25-4x}$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 6$
7.  $y = x^3$  desde  $x = -1$  hasta  $x = 2$
8.  $x^2 + y^2 = 1$  en el 1er. cuadrante.
9. Determine el área comprendida entre la curva  $y = 2\sqrt{x}$  y la recta  $y = x$ .
10. Determine el área entre las curvas cuyas ecuaciones son  $y = 2 - x^2$ ,  $x = y$ .
11. Determine el área comprendida entre las curvas cuyas ecuaciones son  $y = 2x - x^2$ ,  $y = -x$ .
12. Determine el área comprendida entre las curvas cuyas ecuaciones son  $y = x^2$ ,  $4y = 3x$ .
13. Determine el área comprendida entre  $y = \sqrt{8x}$ ,  $x^2 = 8y$ .
14. Determine el área comprendida entre  $y = x^3$ ,  $y = 4x$

15. Determine el área comprendida entre la parábola  $y = 6 + x - x^2$  y la recta que pasa por los puntos  $A(-1, 4)$   $B(3, 0)$ .
16. Determine el área comprendida entre las curvas de ecuaciones  $y = x^3 + x^2 - 2x$ ,  $y = -x^3 - x^2 + 2x$ .

# Paneles de Verificación

## MODULO 13 - VALIDACION

1.  $\frac{x^3}{3} + 2x + c$
2.  $\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + c$
3.  $-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + c$
4.  $\frac{2}{7}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + c$
5.  $-x^{-1} - 4 \log_e x + 4x + c$
6.  $\frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x + c$
7.  $\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 6x^2 - 8x + c$
8.  $-\cos x + c$
9.  $\sin x + c$
10.  $\sin x + c$
11.  $-\frac{x^{-3}}{3} + x + c$
12.  $\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$



$$13. \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3} x^{\frac{3}{2}} + 12x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$14. \frac{1}{2} \log_e x + c$$

$$15. 3e^x + c$$

$$16. e^x + c$$

$$17. \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

$$18. \sin x + c$$

$$19. -\cos x + c$$

$$20. \sin x + c$$

#### MODULO 14 - VALIDACION

$$1. \left( \frac{x^3 - 3}{3} \right)^3 + C$$

$$2. \frac{1}{9} (x^3 - 3)^3 + C$$

$$3. \frac{1}{3} (x^2 - 3)^{3/2} + C$$

$$4. -\log_e (1 - x) + C$$

$$5. -\frac{1}{2} \log_e (4 - x^2) + C$$

$$6. \frac{1}{2} (x^{2/3} - a^{2/3})^3 + C$$

$$7. \frac{1}{16} (x^2 - 10x)^8 + C$$

$$8. \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$9. -\frac{1}{3} \cos^3 x + C$$

$$10. \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

$$11. -\frac{1}{5} \cos 5x + C$$

$$12. \frac{1}{3} \sin 3x + C$$

$$13. \log_e (3x - 1) + C$$

$$14. \log_e \tan x + C$$

$$15. 3 \log_e x + \frac{1}{2} (\log_e x)^2 + C$$

$$16. \frac{1}{4} (\log_e x)^4 + C$$

$$17. -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

$$18. \log_e (\theta^x + 5) + C$$

$$19. \frac{1}{6} e^{3x^2} + C$$

$$20. e^{\frac{1}{x}} + C$$

# MODULO 15 - VALIDACION

$$1. y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}$$

$$2. y = -\frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{28}{3}$$

$$3. y = \frac{3}{2}x^2 + 2$$

$$4. y = x^3 - 2x - 20$$

$$5. y = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$6. y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + 6 - b$$

$$7. y = 2\sqrt{x}$$

$$8. y = e^x + 1$$

$$9. y = -x^2 - 5x - 8$$

$$10. y = 4x^4 + 3$$

$$11. y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}x - 1$$

$$12. y = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{2}} - \frac{157}{3}x + 124$$

$$13. t = 10 \text{ seg.} \quad V = (10) = 98 \text{ m/seg.}$$

$$14. V = 78.4 \text{ m/seg.} \quad S(0) = 313.6 \text{ m.}$$

$$15. t = 5 \text{ seg, } S = 122.5 \text{ m}$$

$$16. a) S_{t_0, t} = 401.8 \text{ m} \quad b) t = 2 \text{ seg} \quad c) t_{t_0, t} = 11 \text{ seg}$$

17.  $t = 4 \text{ seg}$   $V = 142.1 \frac{m}{\text{seg}}$

18.  $S = -2 m$

19.  $V = 17 \frac{m}{\text{seg}}$

### MODULO 16 - VALIDACION

1.  $\frac{64}{3}$

2.  $\frac{56}{3}$

3.  $\frac{81}{4}$

4.  $\frac{128}{3}$

5.  $\frac{16}{3}$

6.  $\frac{62}{3}$

7.  $\frac{15}{4}$

8.  $\frac{\pi}{4}$

9.  $A = \frac{8}{5} u^2$

10.  $A = \frac{9}{2} u^2$



$$11. A = \frac{9}{2} u^2$$

$$12. A = \frac{9}{128} u^2$$

$$13. A = \frac{64}{3} u^2$$

$$14. A = 8 u^2$$

$$15. A = \frac{32}{2} u^2$$

$$16. A = \frac{9}{2} u^2$$