SERIE N° 1
Analyse dimensionnelle et Calcul d'erreur
Corrigé :

Exercice 1 :

La force : on a $F = ma \Rightarrow [F] = [m][a] = MLT^{-2}$
Le travail : on a $W = F.\ell \Rightarrow [W] = [F][\ell] = MLT^{-2}.L = ML^2T^{-2}$
La pression : on a $P = \frac{F}{S} \Rightarrow [P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$
La masse volumique : on a $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow [\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}$
La puissance : on a $P = \frac{W}{t} \Rightarrow\Rightarrow [P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{ML^2T^{-2}}{T} = ML^2T^{-3}$

Exercice 2 :

- $[F] = [G].\frac{[m1].[m2]}{[r]^2} \rightarrow [G] = \frac{[F].[r]^2}{[m1].[m2]}$

$[F] = M.L.T^{-2}$, $[r] = L$ et $[m1] = [m2] = M$
On trouve donc : $[G] = \frac{M.L.T^{-2}.\ L^2}{M^2} = M^{-1}L^3T^{-2}$

$$[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$$

Son unité dans le SI : $kg^{-1}m^3\ s^{-2}$

- $[P][V] = [n][R][T] \rightarrow [R] = \frac{[P][V]}{[n][T]}$

Avec : $[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2} = M.L^{-1}.T^{-2}$, $[V] = L^3$, $[n] = N$ et $[T] = \theta$

$$[R] = \frac{M.L^{-1}.T^{-2}.L^3}{N.\theta} = ML^2T^{-2}N^{-1}\theta^{-1}$$
$$[R] = ML^2T^{-2}N^{-1}\theta^{-1}$$

Son unité dans le SI : $kg\ \ m^2\ s^{-2}\ mole^{-1}\ Kelvin^{-1}$

Exercice 3 :

On a $T = cte.\,l^\alpha g^\beta$
T étant la période d'oscillations donc : $[T] = T$

$$[T] = [cte][l]^\alpha[g]^\beta = 1.L^\alpha.\left(\frac{L}{T^2}\right)^\beta = L^{\alpha+\beta}T^{-2\beta}$$

Par identification on trouve : $\alpha + \beta = 0$ et $-2\beta = 1$
$\Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$ et $\alpha = +\frac{1}{2}$
On trouve alors : $T = cte\ l^{1/2}g^{-1/2} = cte\sqrt{\frac{l}{g}}$

Exercice 4 :

$P = cte\ n^{\alpha} m^{\beta} v^{\gamma}$

$P = \frac{force}{surface}$

$[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$ D'une part,

d'autres part, $[P] = [cte][n]^{\alpha}[m]^{\beta}[v]^{\gamma} = 1.L^{-3\alpha}M^{\beta}L^{\gamma}T^{-\gamma} = L^{-3\alpha+\gamma}M^{\beta}T^{-\gamma}$

par identification, on trouve :

$-3\alpha + \gamma = -1$ et $-\gamma = -2$ et $\beta = 1$

On déduit alors : $\beta = 1$ et $\gamma = 2$ et $\alpha = 1$

Donc : $P = cte\ n.m.v^2$

Exercice 5:

$e = \frac{1}{2}(D_2 - D_1)$

L'erreur absolue : $\Delta e = \frac{1}{2}(\Delta D_2 + \Delta D_1)$

AN : $e = (3.6 \pm 0.1)\ mm$ et $\varepsilon = \frac{\Delta e}{e} = 0.027 \approx 3\%$

Exercice 6 :

$S = \pi R^2$;

$\varepsilon = \frac{\Delta S}{S} = 2\frac{\Delta R}{R} = 0.038 \approx 4\%$,

On trouve donc $\Delta S = 3.27\ cm^2 \approx 4\ cm^2$ (majoration de l'erreur à un chiffre significatif)

$S = (85.2757 \pm 4)\ cm^2 = (85 \pm 4)\ cm^2$

Exercice 7:

$\rho = \frac{m}{V}$

$\varepsilon = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V}$

$\varepsilon = 0.047 \approx 5\%$

$\rho = 1.91\ \ g/cm^3$ et $\Delta\rho = 0.09\ g/cm^3$

$\rho = (1.91 \pm 0.09)\ g/cm^3$

Exercice 8 :

Nous allons utiliser la méthode logarithmique :

$\ln f = \ln(D^2 - d^2) - \ln d - \ln 4$, en passant à la dérivée de cette équation :

$$\frac{\partial f}{f} = \frac{\partial\,(D^2 - d^2)}{(D^2 - d^2)} - \frac{\partial\, d}{d}$$

On sait que : $\partial g(x, y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) dx$

Donc $\partial\,(D^2 - d^2) = \frac{\partial\,(D^2-d^2)}{\partial D}\partial D + \frac{\partial\,(D^2-d^2)}{\partial d}\partial d = 2D\partial D - 2d\partial d$

$$\frac{\partial f}{f} = \frac{2D\partial D - 2d\partial d}{(D^2 - d^2)} - \frac{\partial\, d}{d} = \frac{2D}{(D^2 - d^2)}\partial D - \frac{2d}{(D^2 - d^2)}\partial d - \frac{\partial\, d}{d}$$

En transformant les ∂ en Δ et les signes (-) en signes (+) on trouve :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{2D}{(D^2 - d^2)}\Delta D + \frac{2d}{(D^2 - d^2)}\Delta d + \frac{\Delta\, d}{d} = \frac{2D}{(D^2 - d^2)}\Delta D + \left(\frac{2d}{(D^2 - d^2)} + \frac{1}{d}\right)\Delta d$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{2D}{(D^2 - d^2)}\Delta D + \left(\frac{2d}{(D^2 - d^2)} + \frac{1}{d}\right)\Delta d$$

AN : $\frac{\Delta f}{f} = 0{,}11 \approx 11\%$

$$\Delta f = 1.19875\, m \approx 2\, mm$$
$$f = (11.2375 \pm 2)m = (11 \pm 2)m$$