

# Bac Mathématiques

Burkina Faso 2023

Série F1-F2-F3-F4

1er tour

Durée : 4h

Coefficient : 5

Calculatrice non autorisée

## Exercice 1 (4 points)

- A. Soient  $(U_n)$  et  $(V_n)$  les suites définies par :  $\begin{cases} U_0 = e^3 \\ U_{n+1} = e\sqrt{U_n} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$  et  $V_n = -2 + \ln U_n; n \in \mathbb{N}$
- 1) Calculer  $U_1$  puis montrer que  $V_1 = \frac{1}{2}$ . (1 pt)
  - 2) Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ . (0,75 pt)
  - 3) a) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ . (0,25 pt)  
b) En déduire une expression de  $U_n$  en fonction de  $n$ . (0,5 pt)  
c) calculer la limite de  $U_n$  en  $+\infty$ . (0,5 pt)
- B. 1) Montrer que pour tout réel  $x$ , on a :  $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$ . (0,5 pt)
- 2) En déduire la valeur exacte de l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$ . (0,5 pt)

## Exercice 2 (4 points)

On considère l'équation différentielle (E) définie par :  $(E): y' - 2y = x^2$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  soit solution de l'équation (E). (0,75 pt)
- 2) Résoudre l'équation différentielle (F):  $y' - 2y = 0$ . On appelle  $g$  la solution générale de (F). (0,5 pt)
- 3) Montrer qu'une fonction  $h$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , est solution de (E) si et seulement si  $h - f$  est solution de (F). (1 pt)
- 4) En déduire la solution générale de (E). (1 pt)
- 5) Déterminer la fonction  $h$  qui prend la valeur  $\frac{3}{4}$  en 0. (0,75 pt)

## Problème (12 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  unité graphique : 2 cm.

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x + 1 + \frac{\ln x}{x}$  et

$g(x) = x^2 + 1 - \ln x$  où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien. Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$ .

### Partie A

- 1) Déterminer la dérivée  $g'$  de  $g$  puis étudier son signe sur  $]0; +\infty[$ . (0,75 pt)
- 2) Calculer  $g(\frac{\sqrt{2}}{2})$  puis en déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$  sur  $]0; +\infty[$ . (0,75 pt)
- 3) Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$  puis en déduire une asymptote éventuelle à  $(C)$ . (0,75 pt)
- 4) a) Déterminer la dérivée  $f'$  de  $f$  et vérifier que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ . (0,5 pt)  
b) En déduire le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$ . (1 pt)  
c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $]0; +\infty[$  et que  $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ . (1 pt)
- 5) Montrer que la droite  $(\Delta): y = x + 1$  est une asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$  et préciser la position de  $(\Delta)$  par rapport à  $(C)$ . (1 pt)
- 6) Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $h(x) = -x^2 + 1 - \ln x$ .  
Etudier les variations de  $h$  sur  $]0; +\infty[$ . En remarquant que  $h(1) = 0$ , déterminer le signe de  $h(x)$  suivant les valeurs de  $x$ . (1,25 pt)
- 7) Soit  $A(1; 2)$ . Déterminer une équation cartésienne de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  en  $A$ . (0,5 pt)
- 8) Construire  $(C)$ ;  $(\Delta)$  et  $(T)$ . (1 pt)

### Partie B

- 1) Soit  $(C')$  la courbe représentative de la fonction  $f^{-1}$  réciproque de la fonction  $f$ .  
Construire  $(C')$  en pointillés dans le même repère que  $(C)$ . (0,75 pt)
- 2) a) Soit  $\lambda$  un réel tel que  $\lambda > 1$ . Soit  $(D)$  la région du plan limitée par les droites d'équations  $x = 1$ ;  $x = \lambda$ ;  $y = x + 1$  et  $(C)$ .  
Calculer en  $\text{cm}^2$  et en fonction de  $\lambda$ , l'aire  $\mathcal{A}(\lambda)$  de  $(D)$ . (0,75 pt)  
b) Calculer la limite de  $\mathcal{A}(\lambda)$  en  $+\infty$ . (0,25 pt)

### Partie C

$$(\Gamma): \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = 1 + e^t + te^{-t} \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

- 1) Déterminer une équation cartésienne de  $(\Gamma)$ . (1 pt)
- 2) Déterminer les coordonnées du vecteur tangent  $\vec{V}(t)$  à  $(\Gamma)$  pour  $t = 0$ . (0,75 pt)

On donne :  $\ln(2) = 0,69$