

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS – MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
FILIÈRE : MATHÉMATIQUES



Polycopié de cours

Optimisation sans contraintes

Enseigné aux étudiants de la

Troisième année Licence LMD en Mathématiques

Au premier semestre (L3 - S5)

Préparé par :

Maghnia HAMOU MAAMAR

**LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie**

Année Universitaire : 2020 /2021

Remerciements

Mes remerciements s'adressent à toute personne ayant contribué pour la rédaction de ce polycopié, aux rapporteurs professeur Abdessamad Amir et professeur Boubakeur Benahmed pour leurs remarques assez précieuses et constructives.

Mes remerciements vont à mes amies Louiza, Leila et Houria merci de m'avoir d'accompagner durant toute la réalisation de ce document, votre soutien je ne l'oublierai jamais, merci mes sœurs pour toujours.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Liste des tableaux | iv |
| Table des figures | v |
| Index des notations | vi |
| Introduction | 1 |
| 1 Mise en forme Mathématique | 1 |
| 2 Exemples d'application | 2 |
| 3 Exercices | 5 |
| 4 Solutions des exercices | 7 |
| 1 Calcul différentiel | 11 |
| 1 Différentielle d'ordre un | 11 |
| 2 Différentielle d'ordre deux | 14 |
| 3 Exercices | 14 |
| 4 Solutions des exercices | 16 |
| 2 Analyse convexe | 19 |
| 1 Ensembles convexes | 19 |
| 2 Fonctions Convexes | 20 |
| 3 Propriétés des fonctions convexes | 23 |
| 4 Exercices | 25 |
| 5 Solutions des exercices | 26 |
| 3 Résultats d'existence et d'unicité | 28 |
| 1 Extremums d'une fonction | 28 |
| 2 Existence d'un extremum | 30 |
| 3 Unicité d'un extremum | 33 |
| 4 Exercices | 34 |
| 4 Conditions d'optimalités | 35 |
| 1 Conditions d'optimalités du premier ordre | 36 |
| 2 Conditions d'optimalités du second ordre | 37 |
| 3 Exercices | 39 |
| 4 Solutions des exercices | 41 |
| 5 Méthode du gradient | 43 |
| 1 Ordre de convergence d'une suite | 43 |
| 2 Méthode de descente | 44 |
| 3 Méthode du gradient | 46 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4 | Méthode du gradient conjugué | 52 |
| 5 | Exercices | 59 |
| 6 | Solutions des exercices | 60 |
| 6 | Méthode de Newton | 62 |
| 1 | Exercices | 66 |
| | Annexe | 67 |
| 2 | Signe d'une matrice symétrique | 67 |
| | Bibliographie | 70 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---------------------|----|
| 5.1 | Tableau comparatif. | 58 |
| 5.2 | Tableau comparatif. | 58 |

Table des figures

| | | |
|-----|--|----|
| 1 | Schéma descriptif du problème de Swisscom | 4 |
| 2.1 | Représentation graphique d'une fonction convexe | 21 |
| 3.1 | x_1 : minimum global strict, x_2 : minimum local strict et x_3 : minimum local (non strict) | 29 |
| 3.2 | La fonction f possède un minimum au point $\hat{x} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et un maximum au point $x^* = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | 31 |
| 3.3 | Graphe de la fonction $f(x) = x^2$ | 33 |
| 3.4 | Graphe de la fonction $f(x) = x^3$ | 33 |
| 3.5 | Graphe de la fonction $f(x) = -\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\cos(x)$ | 33 |
| 4.1 | Solution géométrique de l'exercice 2, chapitre 4. | 42 |
| 5.1 | Représentation graphique des directions de descente. | 45 |
| 5.2 | Illustration de la méthode du gradient à pas fixe. | 47 |
| 5.3 | Illustration de la méthode du gradient à pas optimal. | 50 |
| 5.4 | Illustration géométrique du lemme 5.4. | 55 |
| 5.5 | Comparaison entre la méthode du gradient conjugué (en bleu) et la méthode du gradient à pas optimal (en rouge). | 59 |

Notations générales

| | |
|---|---|
| $\langle ., . \rangle$ | produit scalaire |
| $\ .\ $ | norme euclidienne |
| $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ | espace des applications linéaires continues de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m |
| $E(.)$ | partie entière |
| $\overset{\circ}{A}$ | intérieur de A |
| $B(r, x^*)$ | boule ouverte de centre x^* et de rayon r |
| $\operatorname{argmin} f(x)$ | valeur de x pour laquelle f atteint son minimum |
| $Df(x)$ | différentielle de f en x |
| Df | application différentielle de f |
| ∇f | gradient de f |

Introduction et motivation

Ce cours est une introduction à l'optimisation mathématique continue en dimension finie. Il est destiné aux étudiants de la troisième année licence mathématiques. Le document est composé des chapitres suivants :

- Rappel sur le calcul différentiel
- Analyse convexe
- Résultats d'existence et d'unicité
- Conditions d'optimalités
- Méthodes du gradient
- Méthode de Newton.

L'origine du mot optimisation vient du latin *optimum* qui veut dire le meilleur. Dans le dictionnaire Larousse, le mot *optimiser* est défini par : *Donner à quelque chose, à une machine, à une entreprise, etc., le rendement optimal en créant les conditions les plus favorables ou en en tirant le meilleur parti possible.*

En mathématiques, un problème d'optimisation consiste à minimiser (ou maximiser) une fonction à une seule variable (ou à plusieurs variables) sur un ensemble donné. La formulation d'un tel problème passe par trois étapes :

Etape I : Identifier les variables de décision, qui sont les paramètres du problème sur lesquels on peut agir. On les représente par un vecteur colonne $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Etape II : Identifier une fonction mathématique (une mesure) pour laquelle on cherche la plus petite valeur ou la plus grande valeur et qui s'appelle par la suite fonction objectif ou fonction de coût qui est notée f .

Etape III : Décrire les limitations sur les variables de décision.

1 Mise en forme Mathématique

Comme dit précédemment, la formulation mathématique d'un problème d'optimisation passe par la définition de l'ensemble de variables de décision qui régissent la situation à modéliser et qui peuvent être réelles, entières ou binaires. L'identification de la fonction objectif qui est une fonction mathématique linéaire ou non linéaire composée des variables de décision qui représente le modèle physique modélisé. Finalement, la description de l'ensemble des paramètres qui limitent le modèle réalisable par des équations ou des inéquations composées de variables de décision et qu'on appelle par la suite les contraintes. Mathématiquement, un problème d'optimisation est représenté par,

Fonction objectif : $\max f(x)$ ou bien $\min f(x)$

Contraintes : $g(x) \leq 0, g(x) \geq 0$ ou $g(x) = 0$.

Contraintes de bornes : $l \leq x \leq u$

Contraintes de signe : $x \leq 0, x \geq 0$.

2 Exemples d'application

2.1 Exemple : Problèmes aux moindres carrés

Une situation courante en biologie est d'avoir à sa disposition deux ensembles de données de taille n , y_1, y_2, \dots, y_n et x_1, x_2, \dots, x_n , obtenus expérimentalement ou mesurés sur une population. Un problème de régression consiste à trouver une fonction $y = g(\theta, x)$ telle que l'erreur $E_i = y_i - g(\theta, x_i)$ soit la plus petite possible. Le principe des moindres carrés consiste à chercher les paramètres de g , fonction affine, polynôme, exponentielle, etc., qui minimisent la somme des carrés des distances entre y_i et $g(\theta, x_i)$, autrement dit :

$$\begin{cases} \min f(\theta) = \sum_{i=1}^m E_i(\theta)^2 \\ \theta \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

avec $E_i(\theta) = y_i - g(\theta, x_i)$. E_i est appelée le résidu ou l'écart. Ici, la fonction objectif ou la fonction de coût à minimiser est la somme de carrés de $E_i(\theta)$. A titre d'exemple, les données du tableau suivant représente la taille de la population d'antilopes à différents moments.

$$\begin{array}{l} x_i : \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 8 \\ y_i : \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 11 \quad 20 \end{array}$$

Le temps est mesuré en année et la population est mesurée en centaines. Il est courant de modéliser l'évolution d'une population en utilisant un ajustement exponentiel de la forme :

$$g(\theta, x) = \theta_1 \times \exp(\theta_2 \times x).$$

L'objectif : Trouver les paramètres θ_1 et θ_2 qui minimisent le critère des moindres carrés.

2.2 Exemple : Geppetto [5]

L'entreprise de Geppetto produit deux types de jouets en bois, des soldats et des trains. Un soldat est vendu 27 euros et il coûte : 10 euros de matériel brut et 14 euros de coûts généraux. Pour produire un soldat, on a besoin de 1h de menuiserie et 2h de finissage.

Un train est vendu 21 euros et coûte 9 euros de matériel brut et 10 euros par train de coûts généraux. Pour produire un train, on a besoin de 1h de menuiserie et 1h de finissage. Au maximum, la société dispose de :

- 80 h de menuiserie et 100h de finissage par semaine.
- Demande : illimitée pour les trains, maximum 40 soldats par semaine.

L'objectif : Maximiser les bénéfices de Geppetto.

La question qui se pose, sous quelles formes présenter le problème d'optimisation ? Comme on a vu, la démarche de modélisation se déroule en trois étapes :

1. **Variables de décision :** Les bénéfices de Geppetto dépendent du nombre de soldats et de trains vendus par semaine et donc on a comme quantités,
 - x_1 = nombre de soldats produits par semaine.
 - x_2 = nombre de trains produits par semaine.
2. **Fonction objectif :** Le but de Geppetto est de gagner le maximum d'argent possible et donc la quantité à optimiser est son bénéfice et qui est donné par l'équation suivante :

$$\text{Bénéfice} = \text{revenu} - \text{coût du matériel} - \text{coûts généraux},$$

avec

$$\begin{aligned}\text{Revenu} &= \text{revenu pour les soldats} + \text{revenu pour les trains} \\ &= 27x_1 + 21x_2\end{aligned}$$

et,

$$* \text{ Coût du matériel} = 10x_1 + 9x_2.$$

$$* \text{ Coûts généraux} = 14x_1 + 10x_2.$$

Alors

$$\text{Bénéfice} = 27x_1 + 21x_2 - (10x_1 + 9x_2) - (14x_1 + 10x_2).$$

3. **Contraintes :** La production dépend essentiellement des contraintes suivantes :

* Pas plus de 100 h de finissage par semaine.

* Pas plus de 80 heures de menuiserie par semaine.

* Pas plus de 40 soldats par semaine.

Le temps total de finissage se calcule par :

$$\text{Finissage/semaine} = (\text{finissage/soldat})(\text{soldats/semaine}) + (\text{finissage/train})(\text{trains/semaine})$$

donc,

$$\text{Finissage} = 2x_1 + x_2 \leq 100.$$

De même pour le temps total de menuiserie de chaque semaine, on a

$$x_1 + x_2 \leq 80.$$

Enfin, la contrainte pour éviter les invendus s'écrit mathématiquement par l'équation suivante

$$x_1 \leq 40.$$

Dans ce cas, des valeurs réelles négatives des variables de décision n'auraient aucune interprétation valide car il n'est pas concevable de produire des parties de train ou de soldat. Donc, il est nécessaire d'imposer

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}.$$

Finalement, en rassemblant les différentes étapes de modélisation, on trouve le problème d'optimisation,

$\max 3x_1 + 2x_2$
sous contraintes :

$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}.$$

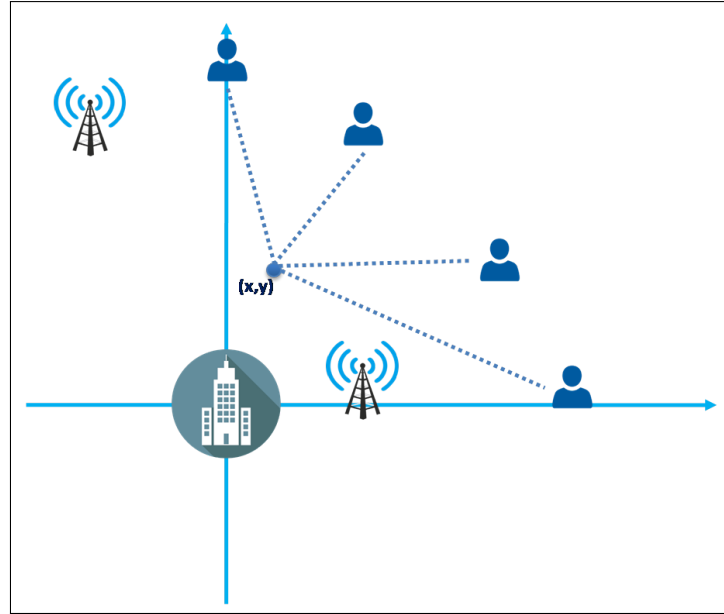


FIGURE 1 – Schéma descriptif du problème de Swisscom

2.3 Exemple : Swisscom [5]

L'entreprise de Swisscom voudrait installer une nouvelle antenne pour faire connecter 4 nouveaux clients importants comme il est décrit dans la figure 1. Cette antenne doit se trouver le plus proche possible de chaque client, la priorité est donnée aux meilleurs clients. Swisscom connaît la localisation (coordonnées (x, y)) et le nombre d'heures de communication par mois de chaque client. Ces données sont représentées dans le tableau suivant.

| Client | Coordonnées | Heures |
|--------|-------------|--------|
| 1 | (5, 10) | 200 |
| 2 | (10, 5) | 150 |
| 3 | (0, 12) | 200 |
| 4 | (12, 0) | 300 |

Cette entreprise a deux autres antennes déjà installées, elles sont notées A_1 et A_2 . La distance entre la nouvelle antenne A_0 et les antennes A_1 et A_2 doit être supérieure à 10 km. Les deux antennes A_1 et A_2 sont situées respectivement aux coordonnées $(-5, 10)$ et $(5, 0)$ qui sont exprimées en kilomètre à partir du siège central de l'entreprise.

L'objectif : *A quel endroit l'entreprise Swisscom doit-elle installer sa nouvelle antenne ?*

La démarche de modélisation passe par trois étapes :

1. **Les variables de décision :** Swisscom doit identifier l'emplacement idéal (Optimal) de l'antenne A_0 . Donc, Chercher les coordonnées (x_1, x_2) de A_0 .
2. **La fonction objectif :**
 - La distance $d_i(x_1, x_2)$ entre un client i de coordonnée (a_i, b_i) et l'antenne A_0 est donnée par :

$$d_i(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 - a_i)^2 + (x_2 - b_i)^2}$$

- Si les clients avaient tous le même potentiel, l'entreprise doit minimiser la distance :

$$f(x_1, x_2) = d_1(x_1, x_2) + d_2(x_1, x_2) + d_3(x_1, x_2) + d_4(x_1, x_2)$$

3. EXERCICES

- Comme les clients n'ont pas tous le même potentiel, la fonction objectif sera donc pondérée par les heures de communication de chaque clients :

$$200d_1(x_1, x_2) + 150d_2(x_1, x_2) + 200d_3(x_1, x_2) + 300d_4(x_1, x_2)$$

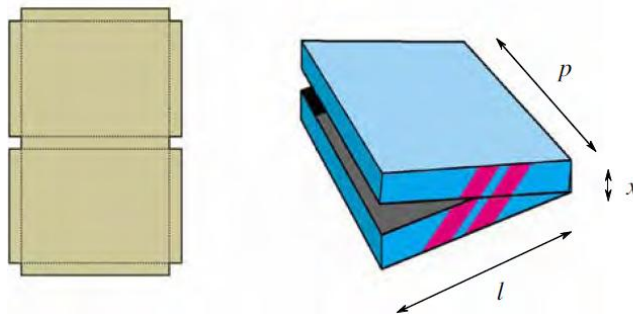
3. **Contraintes :** Les contraintes sur les distances entre les antennes se formulent par :

- $\sqrt{(x_1 + 5)^2 + (x_2 - 10)^2} \geq 10$
- $\sqrt{(x_1 - 5)^2 + x_2^2} \geq 10$

3 Exercices

Exercice 0.1 On veut construire une boîte en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille de carton rectangulaire et en rabattant les bords restants. La feuille est de 22 cm de long et 18 cm de large. Le volume de la boîte construite dépend de la taille des carrés découpés. Pour quelle valeur de x la boîte ait le plus grand volume possible.

Exercice 0.2 On désire construire une boîte à partir d'une feuille cartonnée rectangulaire en coupant six carrés de largeur x à chaque coin et au milieu des côtés et en pliant les côtés comme s'est montré dans la figure. Cette feuille admet comme dimensions : 45×30 cm, le but de cet exercice est de déterminer les dimensions de la boîte fermée pour avoir un volume maximal.



- a- Déterminer la fonction à optimiser ?
- b- Justifier les relations suivantes :

$$p = 30 - 2x$$
$$l = \frac{45 - 3x}{2}.$$

- c- Déterminer l'ensemble des solutions admissibles pour x .
- d- Montrer que le volume exprimé en fonction de x peut s'écrire sous la forme :

$$v(x) = 3x^3 - 90x^2 + 675x.$$

- e- Trouver la valeur de x pour laquelle le volume est maximal.

Exercice 0.3 Une usine qui fabrique deux modèles de bateaux, le modèle standard S et le modèle de luxe L. Le modèle S est vendu avec un profit de 1000 Euros alors que le modèle L est vendu avec un profit de 2000 Euros. Pour construire un bateau du type L, on a besoin

de 200h d'assemblage, 10h de tests et 50h de peinture. Pour construire un bateau du type S, on a besoin de 50h d'assemblage, 10h de tests et 40h de peinture. L'usine ne dispose qu'un total de 3000h d'assemblage, 500h de tests et 1300h de peinture. En établissant le problème d'optimisation, déterminer la production optimale ?

Exercice 0.4 Une compagnie aérienne fabrique et vend des avions sur deux marchés étrangers. On note par q_1 le nombre d'avions vendus sur le premier marché et par q_2 le nombre d'avions vendus sur le deuxième marché. Les deux prix de vente sur les deux marchés sont notés par p_1 et p_2 et ils sont donnés par :

$$p_1 = 60 - 2q_1$$

$$p_2 = 80 - 2q_2$$

La fonction du coût total de la compagnie est donnée par

$$C = 50 + 40q;$$

où q décrit le nombre total d'avions produits par cette compagnie i.e. $q = q_1 + q_2$. Le but est de trouver le nombre d'avions que la compagnie doit vendre pour maximiser son profit.

Exercice 0.5 Un fabricant de télévisions couleurs (LCD) envisage l'introduction de deux nouveaux produits, un écran plat (LCD) 19 pouces avec un prix de détail suggéré par le fabricant de 339 \$ et un écran plat (LCD) 21 pouces avec un prix de 399 \$. Le coût pour l'entreprise est de 195 dollars par écran à 19 pouces et 225 dollars par écran à 21 pouces, auxquels s'ajoutent 400 000 dollars de coûts fixes. Sur le marché concurrentiel dans lequel ces écrans seront vendus, le nombre de ventes par an affectera le prix de vente moyen. On estime que pour chaque type d'écrans, le prix de vente moyen chute d'un centime par unité supplémentaire vendue. De plus, les ventes des ensembles des écrans de 19 pouces affecteront les ventes des ensembles des écran de 21 pouces, et vice versa. On estime que le prix de vente moyen de l'ensemble 19 pouces sera réduit de 0,3 centime supplémentaire pour chaque ensemble de 21 pouces vendu et que le prix de l'ensemble 21 pouces diminuera de 0,4 centimes pour chaque ensemble de 19 pouces vendu. Combien d'unités de chaque type d'écran devraient être fabriquées ?

Exercice 0.6 (Emplois du temps d'infirmières)

Le responsable du service de Cardiologie de l'hôpital Saint-Joseph est chargé d'organiser le planning des infirmières . Une journée de travail dans ce service est divisée en douze tranches de deux heures chacune. Les besoins du personnel varient d'une tranche horaire à l'autre : par exemple, peu d'infirmières sont nécessaires la nuit, par contre l'effectif doit être renforcé le matin afin d'assurer les différents soins à apporter aux patients. le tableau

ci-dessous donne les besoins de personnel pour chacune des tranches horaires.

| Tranche i | Tranches horaires | Nombre minimal d'infirmières |
|-------------|-------------------|------------------------------|
| 1 | 06 h - 08 h | 35 |
| 2 | 08 h - 10 h | 40 |
| 3 | 10 h - 12 h | 40 |
| 4 | 12 h - 14 h | 35 |
| 5 | 14 h - 16 h | 30 |
| 6 | 16 h - 18 h | 30 |
| 7 | 18 h - 20 h | 35 |
| 8 | 20 h - 22 h | 30 |
| 9 | 22 h - 00 h | 20 |
| 10 | 00 h - 02 h | 15 |
| 11 | 02 h - 04 h | 15 |
| 12 | 04 h - 06 h | 15 |

Besoin en personnel par tranches horaires

Etablir le problème d'optimisation donnant un nombre minimal d'infirmières nécessaires pour couvrir tous les besoins, sachant qu'une infirmière travaille 08 h par jour et qu'elle a droit à une pose de 2 h au bout de 04 h de travail.

4 Solutions des exercices

Solution 0.1 La variable de décision est la dimension de carré découpé et elle est notée par x .

L'objectif ici est de déterminer le volume maximal de la boîte construite, ce qui est traduit mathématiquement par :

$$\max V(x) = x(22 - 2x)(18 - 2x)$$

avec

$$0 < x < \frac{1}{2} \min(22, 18) = 9.$$

Solution 0.2 a- La fonction à optimiser est le volume, et sa formule est :

$$V(x) = \frac{1}{2} x(45 - 3x)(30 - 2x).$$

b- La largeur de la boîte est obtenue en coupant deux carrés de la feuille cartonnée et donc

$$p = 30 - 2x.$$

La longueur de la boîte est obtenue en coupant trois carrés de la feuille cartonnée et en pliant la longueur en deux,

$$l = \frac{45 - 3x}{2}.$$

c- Déterminer D , l'ensemble des valeurs admissibles pour x .

$$\begin{aligned} D &= \left\{ 0 < x < \frac{1}{2} \min(45, 30) \right\} \\ &= \{0 < x < 15\}. \end{aligned}$$

d- Le volume exprimé en fonction de x est :

$$V(x) = 3x^3 - 90x^2 + 675x.$$

e- Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume est maximal.

On peut simplifier V' comme suit :

$$\begin{aligned} V'(x) &= 6x(x-15) + 3(x-15)^2 \\ &= (x-15)(9x-45), \end{aligned}$$

donc,

$$V'(x) = 0$$

ce qui implique

$$x = 15 \text{ ou } x = 5.$$

| | | | |
|---------|---|------|----|
| x | 0 | 5 | 15 |
| $V'(x)$ | + | 0 | - |
| $V(x)$ | 0 | 1500 | 0 |

D'après le tableau de la variation de V la solution optimale est $x^* = 5$.

Solution 0.3 La modélisation du problème :

1. Les variables de décision :

x_1 = le nombre de bateaux de type S.

x_2 = le nombre de bateaux de type L.

2. La fonction objectif :

$$\text{Bénéfice} = 1000x_1 + 2000x_2.$$

3. Les contraintes :

– L'usine dispose d'un total de 3000h d'assemblage, donc

$$\begin{aligned} \text{Assemblage} &= (\text{Assemblage/S}) \times x_1 + (\text{Assemblage/L}) \times x_2 \\ &= 50x_1 + 200x_2 \leq 3000. \end{aligned}$$

– L'usine dispose d'un total de 1300h de peinture, alors

$$\begin{aligned} \text{Peinture} &= (\text{Peinture/S}) \times x_1 + (\text{Peinture/L}) \times x_2 \\ &= 40x_1 + 50x_2 \leq 1300. \end{aligned}$$

– L'usine dispose d'un total de 500h de tests,

$$\begin{aligned} \text{Test} &= (\text{test/S}) \times x_1 + (\text{test/L}) \times x_2 \\ &= 10x_1 + 10x_2 \leq 500. \end{aligned}$$

– $x_1, x_2 \in \mathbb{N}^*$.

On rassemble les différentes étapes de modélisation, on trouve le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max 1000x_1 + 2000x_2 \\ 50x_1 + 200x_2 \leq 3000 \\ 40x_1 + 50x_2 \leq 1300 \\ 10x_1 + 10x_2 \leq 500 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Solution 0.4 Dans cet exercice, le revenu total de la firme est donné par :

$$\begin{aligned} R &= \text{prix de vente sur le marché 1} \times q_1 + \text{prix de vente sur le marché 2} \times q_2 \\ &= p_1 q_1 + p_2 q_2 \\ &= (60 - 2q_1) q_1 + (80 - 2q_2) q_2. \end{aligned}$$

Le profit total de la firme s'obtient en calculant la différence entre le revenu et le coût :

$$\begin{aligned} P &= R - C \\ &= (-2q_1^2 + 60q_1 - 2q_2^2 + 80q_2) - (50 + 40(q_1 + q_2)) \\ &= -2q_1^2 + 20q_1 - 2q_2^2 + 40q_2 - 50. \end{aligned}$$

Solution 0.5 On note par :

s_1 le nombre des écrans plats de 19 pouces et s_2 le nombre des écrans plats de 21 pouces.

La fonction de coût est :

$$C = 195s_1 + 225s_2 + 400000.$$

On note par p_1 le prix de chaque unité de type s_1 et p_2 le prix de chaque unité de type s_2 , donc

$$p_1 = (339 - 0.004s_2 - 0.01(s_1 + s_2)),$$

et

$$p_2 = (399 - 0.003s_1 - 0.01(s_1 + s_2)).$$

Alors le revenu total est

$$\begin{aligned} R &= p_1 s_1 + p_2 s_2 \\ &= (339 - 0.004s_2 - 0.01(s_1 + s_2)) s_1 + (399 - 0.003s_1 - 0.01(s_1 + s_2)) s_2. \end{aligned}$$

Le profit total :

$$\begin{aligned} P &= R - C \\ &= ((339 - 0.004s_2 - 0.01(s_1 + s_2)) s_1 + (399 - 0.003s_1 - 0.01(s_1 + s_2)) s_2) - (195s_1 + 225s_2 + 400000). \end{aligned}$$

Solution 0.6 Le problème est de déterminer le nombre minimal d'infirmières nécessaires pour couvrir tous les besoins, sachant qu'une infirmière travaille 08 h par jour et qu'elle a droit à une pause de 2 h au bout de 04 h de travail.

Modélisation : Il va falloir d'abord identifier la variable de décision $x = (x_1, \dots, x_n)$, où x_i désigne le nombre d'infirmières commençant à travailler à la tranche i (tranche 1 = tranche de 6 h à 8 h, tranche 2 = tranche de 8 h à 10h, etc.), $n = 12$ est donc le nombre de tranches horaires. L'objectif est de minimiser le nombre d'infirmières.

On peut additionner les variables x_i car chaque infirmière n'intervient qu'une fois par jour. La fonction objectif est donnée tout simplement par (1)

$$\min \sum_{i=1}^n x_i. \tag{1}$$

On doit s'assurer que le nombre d'infirmières est suffisant durant chaque tranche horaire. Ainsi, par exemple, durant la première tranche horaire, 35 infirmières sont nécessaires. Le nombre d'infirmières travaillant durant la première tranche horaire est égal au nombre d'infirmières ayant commencé à travailler durant les tranches horaires 9, 10, 12, et 1. En effet, une infirmière commençant par exemple à travailler durant la tranche horaire 10 va travailler durant les tranches horaires 10, 11, 1 et 2 et se reposera durant la tranche horaire 12 puisqu'elle a droit à une pause de 02 h après 04 h de travail. Notons par b_i le besoin en infirmières pour la période i . On obtient pour la tranche horaire 1 la contrainte (2)

$$x_9 + x_{11} + x_1 + x_2 \geq 35. \quad (2)$$

De la même manière, les contraintes de respect des besoins du personnel pour les tranches horaires suivantes seront établies. Finalement le nombre d'infirmières est nécessairement un nombre entier. Le modèle mathématique est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^n x_i \\ x_9 + x_{10} + x_{12} + x_1 \geq 35 \\ x_{10} + x_{11} + x_1 + x_2 \geq 40 \\ x_{11} + x_{12} + x_2 + x_3 \geq 40 \\ x_{12} + x_1 + x_3 + x_4 \geq 35 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \geq 30 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 \geq 30 \\ x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 35 \\ x_4 + x_5 + x_7 + x_8 \geq 30 \\ x_5 + x_6 + x_8 + x_9 \geq 20 \\ x_6 + x_7 + x_9 + x_{10} \geq 15 \\ x_7 + x_8 + x_{10} + x_{11} \geq 15 \\ x_8 + x_9 + x_{11} + x_{12} \geq 15 \\ \forall i = 1, \dots, n : x_i \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Chapitre 1

Calcul différentiel

Dans ce chapitre, on rappelle les principaux résultats du calcul différentiel, essentiellement la définition de la différentielle d'ordre 1 et d'ordre 2.

1 Différentielle d'ordre un

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, qui à $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \longmapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^\top$. Avant de donner la définition de la différentiabilité, il est important de rappeler celle de la continuité :

Définition 1.1 *f est dite continue au point x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

En dimension 1, une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe un nombre réel $f'(x_0)$ tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h|}{|h|} = 0.$$

En dimension strictement supérieure à 1, cette définition se formule comme suit :

Définition 1.2 (La différentiabilité) *f est différentiable au point x_0 s'il existe une application linéaire continue notée $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ telle que*

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

autrement dit,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \|h\| \varepsilon(h),$$

avec ε est une fonction continue tel que $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

L'application $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est appelée la différentielle de f au point x_0 et elle est notée $Df(x_0)$. $L(h) = Df(x_0)(h)$ est une valeur de \mathbb{R}^m .

Exemple 1.1 *Soit f une fonction constante. Il est clair que f est continûment différentiable, de différentielle nulle. En effet, on a pour tout $(x, h) \in U \times \mathbb{R}^n$,*

$$f(x + h) - f(x) = 0.$$

Exemple 1.2 Soient $f(x) = Ax + b$, avec $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $b \in \mathbb{R}^m$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= A(x_0 + h) + b \\ &= f(x_0) + A(h), \end{aligned}$$

d'où,

$$Df(x_0) = A.$$

Exercice 1.1 Montrer que si f est différentiable en un point x_0 alors f est nécessairement continue au point x_0 .

Définition 1.3 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et f une fonction définie de U dans \mathbb{R}^m . f est dite différentiable sur U , si f est différentiable sur tout point $x_0 \in U$. Dans ce cas, on appelle différentielle de f la fonction

$$\begin{aligned} Df : U &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ x &\rightarrow Df(x). \end{aligned}$$

Si de plus, la différentielle Df est une fonction continue sur U , alors on dit que f est continûment différentiable ou f est de classe C^1 .

On appelle dérivées partielles de f les fonctions notées $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ définies par :

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x_1, \dots, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_n)}{t},$$

on définit la matrice jacobienne au point x comme la matrice de l'application linéaire $Df(x)$ dans les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m . Elle est donnée par

$$[Df(x)]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Si $m = 1$, on note $\nabla f(x)$ la matrice transposée de $Df(x)$ appelé gradient de f au point x .

Remarque 1.1 f peut avoir des dérivées partielles sans qu'elle soit différentiable. Par exemple si l'on prend $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0, \end{cases}$$

La fonction f est nulle au point $(0, 0)$, ses dérivées partielles existent et elles sont nulles alors que la fonction n'est pas différentiable en ce point. D'après le théorème précédent, on a

$$\begin{aligned} f(h_1, h_2) &= f(0, 0) + Df(0, 0)(h) + \|h\| \varepsilon(h) \\ &= \|h\| \varepsilon(h), \end{aligned}$$

où $\|h\| = (h_1^2 + h_2^2)^{\frac{1}{2}}$. Pour $h = (3t, 4t)$, on a $\frac{f(3t, 4t)}{\|h\|} = \frac{12}{25}$, qui ne tend pas vers zéro avec t .

Le lemme suivant permet dans le cas d'une fonction différentiable de calculer de façon pratique sa différentielle.

Lemme 1.1 Soit f une fonction définie de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^m différentiable au point x , alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = Df(x)(h).$$

Preuve. On suppose que f est différentiable au point x , alors pour tout $t \in I$ un ouvert de \mathbb{R} , on a :

$$f(x + th) = f(x) + tDf(x)(h) + \|th\| \varepsilon(th),$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(th) = 0$.

On en déduit que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = Df(x)(h).$$

■

Exemple 1.3 Soit f une fonction quadratique,

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle.$$

$A \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $b \in M_{(n,1)}(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle de f au point x .

Il suffit de calculer,

$$Df(x)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t},$$

On a,

$$\begin{aligned} f(x + th) &= \frac{1}{2} \langle x + th, A(x + th) \rangle + \langle b, x + th \rangle \\ &= \overbrace{\frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle}^{f(x)} + \frac{1}{2} [t \langle x, Ah \rangle + t \langle h, Ax \rangle + t^2 \langle h, Ah \rangle] + t \langle b, h \rangle \\ &= f(x) + t \langle Ax + b, h \rangle + \frac{1}{2} t^2 \langle h, Ah \rangle \end{aligned}$$

D'où,

$$f(x + th) - f(x) = t \langle Ax + b, h \rangle + \frac{1}{2} t^2 \langle h, Ah \rangle$$

En dévisant par t ,

$$\frac{f(x + th) - f(x)}{t} = \langle Ax + b, h \rangle + \frac{1}{2} t \langle h, Ah \rangle,$$

et par passage à la limite, on trouve,

$$Df(x)(h) = \langle Ax + b, h \rangle, \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Donc,

$$Df(x) = (Ax + b)^T.$$

Exercice 1.2 Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables,

1. $f(x) = \langle x, Ax \rangle, x \in \mathbb{R}^n$, avec $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.
2. $f(x, y) = x^2 + y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. $f(x) = \|x\|_2, x \in \mathbb{R}_*^n$.

Calculer leurs différentielles.

2 Différentielle d'ordre deux

Définition 1.4 Soit f une fonction définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R} . Supposons que f est différentiable en tout point de U . On a $Df : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, et si de plus Df est différentiable en un point $x \in U$, on dira que f est deux fois différentiable en x . La différentielle d'ordre 2 au point x est notée $\nabla^2 f(x)$.

Théorème 1.1 [6] Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et f une fonction définie de U dans \mathbb{R} . f est deux fois différentiable en un point x , alors, il existe une matrice symétrique notée $\nabla^2 f(x)$ et une fonction continue $\varepsilon(\cdot)$ avec $\varepsilon(\|h\|) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, telle que

$$f(x+h) = f(x) + Df(x) \cdot h + \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(x) h + \|h\|^2 \varepsilon(h);$$

La matrice $\nabla^2 f(x)$ est appelée matrice Hessienne de f au point x , elle définit comme suit

$$\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,n},$$

où,

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.4 Soit la forme quadratique,

$$q(x) = \frac{1}{2} \langle x, Hx \rangle + \langle x, b \rangle, \quad (1.1)$$

Où H est une matrice symétrique d'ordre n . On sait déjà que,

$$Dq(x) = (Hx + b)^T.$$

On déduit que,

$$\nabla^2 q(x) = H.$$

3 Exercices

Exercice 1.3 Soient les fonctions suivantes :

1.

$$f_1(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_1 - x_3$$

2.

$$f_2(x) = (x_1 - 1)^2 + 10(x_1 - x_2)^2$$

3.

$$f_3(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - x_1x_2 + 11x_1 + 11x_2 + 11$$

1. Calculer $\nabla f_i(x)$ et $\nabla^2 f_i(x)$ pour $i = 1, 2$ et 3.

2. Parmi ces fonctions lesquelles sont quadratiques ? Justifier ?

Exercice 1.4 Déterminer $Df(x)$ et $\nabla^2 f(x)$ de la fonction quadratique :

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle x, b \rangle + c,$$

avec $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $b \in M(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.5 Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction f au voisinage du point x_0 avec :

a) $f(x) = x_1 e^{-x_2} + x_2 + 1$, $x_0 = (1, 0)^\top$.

b) $f(x) = x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4$, $x_0 = (1, 1)^\top$.

Exercice 1.6 Soit $x(t) = (e^t, t^2, t)^\top$, $t \in \mathbb{R}$, et $f(x) = x_1 x_3^2 + x_1 x_2 + x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$. Trouver $\frac{d}{dt} f(x(t))$ en termes de t .

Exercice 1.7 Le but de l'exercice est de retrouver la formule de Taylor pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $f \in C^2$, soient x et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et soit

$$z(\alpha) = x_0 + \alpha \frac{(x - x_0)}{\|x - x_0\|}.$$

on définit la fonction,

$$\alpha \mapsto \phi(\alpha) = f(z(\alpha)).$$

1. Déterminer $\phi'(\alpha)$ et $\phi''(\alpha)$.
2. En remarquant que $f(x) = \phi(\|x - x_0\|)$, en déduire que,

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^\top \nabla^2 f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$$

Exercice 1.8 Soit φ une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par,

$$f(x, y) = \int_0^{x+y} \varphi(t) dt \text{ et } g(x, y) = \int_0^{xy} \varphi(t) dt.$$

1. Montrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
2. Notons par $Df(x, y)$ et $Dg(x, y)$ les différentielles de f et g au point (x, y) respectivement. Calculer

$$Df(x, y)(h, k) \text{ et } Dg(x, y)(h, k) \text{ pour tout } (h, k) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 1.9 Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe C^2 . On définit la fonction réelle $g(t) = f(x(t))$.

1. Calculer $g''(t)$ dans le cas où $x(t) = u + tv$ où u et v sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n .
2. Calculer $g''(t)$ pour $x(t)$ quelconque.

4 Solutions des exercices

Solution 1.1 Soient les fonctions suivantes

1.

$$f_1(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_1 - x_3$$

2.

$$f_2(x) = (x_1 - 1)^2 + 10(x_1 - x_2)^2$$

3.

$$f_3(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - x_1x_2 + 11x_1 + 11x_2 + 11$$

1. Calculer $\nabla f_i(x)$ et $\nabla^2 f_i(x)$ pour $i = 1, 2$ et 3.

$$\nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 - 3 \\ 4x_2 + x_1 + 2x_3 \\ 3x_3 + 2x_2 - 1 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2 f_1(x) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\nabla f_2(x) = \begin{pmatrix} 22x_1 - 20x_2 - 2 \\ -20x_1 + 20x_2 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2 f_2(x) = \begin{bmatrix} 22 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix},$$

$$\nabla f_3(x) = \begin{pmatrix} 10x_1 - x_2 + 11 \\ -x_1 + 10x_2 + 11 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2 f_3(x) = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix},$$

2. Comme $\nabla^2 f_i(x)$ est **constante** et **symétrique**, alors f_i est quadratique pour $i = 1, 2$ et 3.

Solution 1.2 Il est clair que la fonction f est de classe C^2 , donc on peut appliquer le lemme 1.1,

$$Df(x)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t},$$

On a

$$\begin{aligned} f(x+th) &= \frac{1}{2} \langle x+th, A(x+th) \rangle + \langle b, x+th \rangle \\ &= \overbrace{\frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle}^{f(x)} + \frac{1}{2} [t \langle x, Ah \rangle + t \langle h, Ax \rangle + t^2 \langle h, Ah \rangle] + t \langle b, h \rangle \\ &= f(x) + \frac{1}{2} [t \langle A^T x, h \rangle + t \langle h, Ax \rangle + t^2 \langle h, Ah \rangle] + t \langle b, h \rangle \end{aligned}$$

D'où

$$f(x+th) - f(x) = t \left\langle \frac{1}{2} (A^T + A)x + b, h \right\rangle + \frac{1}{2} t^2 \langle h, Ah \rangle$$

En dérivant par t

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \left\langle \frac{1}{2} (A^T + A)x + b, h \right\rangle + \frac{1}{2} t \langle h, Ah \rangle,$$

et par passage à la limite, on trouve

$$Df(x)(h) = \left\langle \frac{1}{2} (A^T + A)x + b, h \right\rangle, \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Donc

$$Df(x) = \frac{1}{2} (A^T + A)x + b.$$

Solution 1.3 Soit $x(t) = (e^t, t^2, t)^\top$, $t \in \mathbb{R}$, et $f(x) = x_1 x_3^2 + x_1 x_2 + x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$. Trouver $\frac{d}{dt} f(x(t))$ en termes de t .

Rappel :

Théorème : Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, différentiable sur D , et soit $x : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow D$, différentiable sur (a, b) . Alors, la fonction composée $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $h(t) = f(x(t))$ est différentiable sur (a, b) et

$$\begin{aligned} h'(t) &= Df(x(t)) \circ x'(t) \\ &= \nabla f(x(t))^\top \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'après le théorème, on a

$$\begin{aligned} Df(x(t)) \circ x'(t) &= \left\langle \begin{pmatrix} 1+2t \\ \exp(t) \\ 2\exp(t)+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \exp(t) \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= (1+2t)\exp(t) + 2t\exp(t) + (2\exp(t)+1). \end{aligned}$$

Solution 1.4 Rappel : Soit $f \in C^2$, le développement de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction f au voisinage du point x_0 est donné par,

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^\top \nabla^2 f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2).$$

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 + (1, 0) \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} + o(\|x - x_0\|^2) \\ &= 2 + x_1 - 1 + x_2^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2 + o(\|x - x_0\|^2). \end{aligned}$$

b)

$$f(x) = 4 + (8, 8) \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} + o(\|x - x_0\|^2).$$

Solution 1.5 Le but de l'exercice est de retrouver la formule de Taylor pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $f \in C^2$, soient x et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et soit,

$$z(\alpha) = x_0 + \alpha \frac{(x - x_0)}{\|x - x_0\|}.$$

On définit la fonction,

$$\alpha \mapsto \phi(\alpha) = f(z(\alpha)).$$

1. Déterminer $\phi'(\alpha)$ et $\phi''(\alpha)$.

On a $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par :

$$\begin{aligned}\phi(\alpha) &= f(z(\alpha)) \\ &= f\left(x_0 + \alpha \frac{(x - x_0)}{\|x - x_0\|}\right).\end{aligned}$$

En utilisant la **règle de dérivation des fonctions composées**, on obtient,

$$\begin{aligned}\phi'(\alpha) &= Df(z(\alpha)) \circ Dz(\alpha) \\ &= Df(z(\alpha)) \frac{(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \\ &= \frac{1}{\|x - x_0\|} (x - x_0)^\top Df(z(\alpha))^\top.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\phi''(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}(\phi'(\alpha)) \\ &= \frac{1}{\|x - x_0\|} (x - x_0)^\top \frac{d}{d\alpha}(Df(z(\alpha))^\top) \\ &= \frac{1}{\|x - x_0\|} (x - x_0)^\top D(Df)(z(\alpha))^\top Dz(\alpha) \\ &= \frac{1}{\|x - x_0\|^2} (x - x_0)^\top \nabla^2 f(z(\alpha)) (x - x_0).\end{aligned}$$

2. En remarquant que,

$$\begin{aligned}f(x) &= \phi(\|x - x_0\|) \\ &= \phi(0) + \frac{\|x - x_0\|}{1!} \phi'(0) + \frac{\|x - x_0\|^2}{2!} \phi''(0) + o(\|x - x_0\|^2),\end{aligned}$$

d'où,

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^\top \nabla^2 f(x_0) (x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2).$$

Solution 1.6 1. On remarque que $f = f_1 \circ f_2$ avec,

$$f_1(t) = \int_0^t \varphi(s) ds, \text{ et } f_2(x, y) = x + y. \quad (1.2)$$

2. Comme φ est continue on déduit que f_1 est de classe C^1 . f_2 est évidemment de classe C^1 . On déduit que la composée f est de classe C^1 .

En utilisant la **règle de dérivation des fonctions composées**, on obtient,

$$\begin{aligned}Df(x, y)(h, k)^\top &= Df_1(f_2 \circ f_2)(x, y) \\ &= Df_1(f_2(x, y)) \circ Df_2(x, y)(h, k)^\top,\end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}Df(x, y)(h, k)^\top &= \varphi(x + y)(1, 1)(h, k)^\top \\ &= (\varphi(x + y), \varphi(x + y))(h, k)^\top \\ &= \varphi(x + y)(h + k).\end{aligned}$$

– Même raisonnement pour g , on trouve,

$$\begin{aligned}Dg(x, y)(h, k)^\top &= \varphi(xy)(y, x)(h, k)^\top \\ &= (\varphi(xy)y, \varphi(xy)x)(h, k)^\top \\ &= \varphi(xy)(yh + xk).\end{aligned}$$

Chapitre 2

Analyse convexe

Ce chapitre présente les éléments d'analyse convexe qui nous seront utiles pour étudier les problèmes d'optimisation et les algorithmes qui les résolvent.

1 Ensembles convexes

Définition 2.1 (Un segment) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, on appelle un segment de \mathbb{R}^n , l'ensemble noté et défini par,

$$[x, y] = \{(1 - \alpha)x + \alpha y : \alpha \in [0, 1]\}.$$

Définition 2.2 (Ensemble convexe) Soit $C \subset \mathbb{R}^n$, C est dit **convexe** si

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in C : (1 - \lambda)x + \lambda y \in C, \quad (2.1)$$

ou d'une manière équivalente

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \text{ avec } \alpha + \beta = 1, \forall x, y \in C : \alpha x + \beta y \in C,$$

ou bien,

$$\forall x, y \in C, [x, y] \subset C.$$

Exemple 2.1 \emptyset et \mathbb{R}^n sont deux ensembles convexes.

Exemple 2.2 Un sous-espace vectoriel est évidemment convexe, de même pour un sous-espace affine qui n'est rien d'autre que le translaté d'un sous-espace vectoriel.

Exemple 2.3 Soit l'ensemble

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 4\},$$

l'ensemble H peut aussi s'écrire comme suit :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3 : x^\top p = 4\},$$

avec $p = (1, 2, -1)^\top$. L'ensemble H est appelé hyperplan¹, le vecteur p est dit vecteur normal.

1. C'est aussi un sous espace affine c-à-d $H = F + a$, où F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et a un vecteur fixé dans \mathbb{R}^n .

L'ensemble Π est-il convexe ?

Soient $\lambda \in [0, 1]$ et $x, y \in \Pi$. Montrons que $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \Pi$ i.e.

$$p^T((1 - \lambda)x + \lambda y) \stackrel{?}{=} 4.$$

On a,

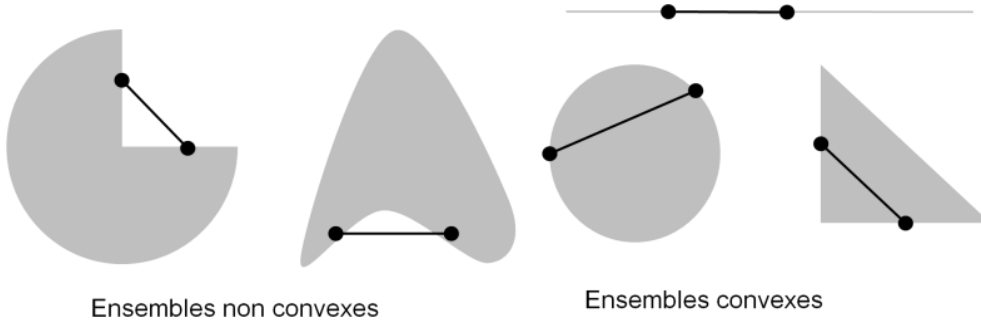
$$\langle p, (1 - \lambda)x + \lambda y \rangle = (1 - \lambda)\langle p, x \rangle + \lambda\langle p, y \rangle = (1 - \lambda)4 + \lambda 4 = 4.$$

Donc, $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \Pi$. La convexité de Π s'ensuit.

D'une manière générale un hyperplan H de \mathbb{R}^n est défini à partir d'un vecteur normal p et une constante α , c-à-d $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T p = \alpha\}$.

Exemple 2.4 L'ensemble $H_- = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T p \leq \alpha\}$ est appelé demi-espace négatif, d'une manière équivalente on définit l'autre demi-espace positif $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T p \geq \alpha\}$ associé à l'hyperplan H .

Le lecteur peut vérifier que H_+ et H_- sont aussi des ensembles convexes.



Proposition 2.1 ■ Si Ω est un ensemble convexe et $\beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\beta\Omega = \{y : y = \beta x, x \in \Omega\}$$

est aussi convexe.

■ Si Ω_1 et Ω_2 sont deux ensembles convexes, alors

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \{x + y : x \in \Omega_1 \text{ et } y \in \Omega_2\}$$

est convexe.

■ Soit $\{C_i\}_{i \in I}$ une famille d'ensembles convexes (I est un ensemble d'indices quelconques dénombrable ou non). Alors, $\cap_{i \in I} C_i$ est convexe.

2 Fonctions Convexes

Définition 2.3 Soit C un ensemble convexe de \mathbb{R}^n et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$.

– f est dite convexe si

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in C : f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad (2.2)$$

ou

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in C : f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x)),$$

ou aussi

$$\forall p, q \geq 0, p + q = 1 : f(px + qy) \leq pf(x) + qf(y),$$

– f est dite strictement convexe si

$$\forall \lambda \in]0, 1[, \forall x, y \in C \text{ et } x \neq y : f((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Exemple 2.5 Soit $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire, et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit une application affine h par $h(x) = L(x) + \alpha$.

Soient $\lambda \in [0, 1]$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a $h((1 - \lambda)x + \lambda y) = L((1 - \lambda)x + \lambda y) + \alpha$.

La linéarité de L donne

$$\begin{aligned} h((1 - \lambda)x + \lambda y) &= (1 - \lambda)L(x) + \lambda L(y) + \alpha \\ &= (1 - \lambda)L(x) + \lambda L(y) + (1 - \lambda)\alpha + \lambda\alpha \\ &= (1 - \lambda)(L(x) + \alpha) + \lambda(L(y) + \alpha) \\ &= (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y). \end{aligned}$$

D'où f est convexe.

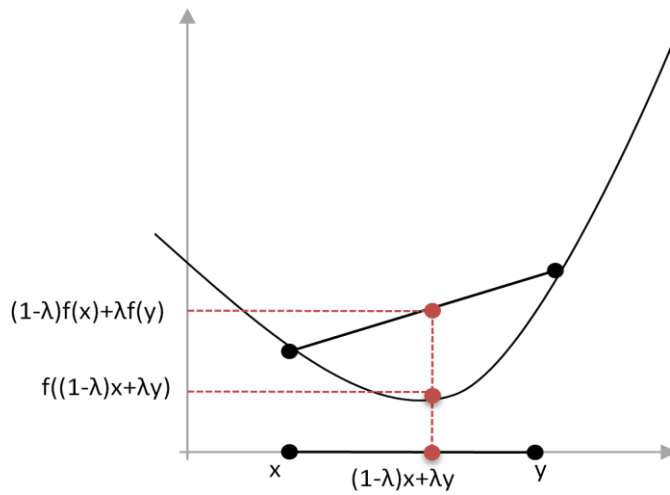


FIGURE 2.1 – Représentation graphique d'une fonction convexe

Remarque 2.1 Une fonction strictement convexe est évidemment convexe. La réciproque n'est pas toujours vraie, il suffit de prendre l'application affine comme un contre exemple.

Définition 2.4 (Fonction concave) Soit C un ensemble convexe de \mathbb{R}^n et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. f est dite concave si $(-f)$ est convexe i.e.

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in C : f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Remarque 2.2 Toute application affine est convexe et concave à la fois.

La notion d'ensemble suivante met bien le lien entre une fonction et un ensemble convexe.

Définition 2.5 – L'épigraph de f est la partie de $C \times \mathbb{R}^n$ qui est au dessus de son graphe. On le note epi_f et

$$\text{epi}_f = \{(x, \alpha) : f(x) \leq \alpha\}$$

- L'hypographe de f est la partie de $C \times \mathbb{R}^n$ qui est au dessous de son graphe. On le note hyp_f et

$$\text{hyp}_f = \{(x, \alpha) : f(x) \geq \alpha\}$$

Proposition 2.2 Soit $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, avec C convexe. Alors, f est convexe (resp. concave) si et seulement si son épigraphe (resp. hypographe) est convexe.

Preuve. Supposons que f est convexe et montrons que epi_f est convexe i.e.

$$(1 - \lambda)(x_1, \alpha_1) + \lambda(x_2, \alpha_2) \stackrel{?}{\in} \text{epi}_f$$

ce qui est équivalent à

$$((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2) \stackrel{?}{\in} \text{epi}_f \iff f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2.$$

Soient $(x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2) \in \text{epi}_f$.

On a f est convexe, donc

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \leq (1 - \lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2,$$

la dernière inégalité est due au fait que $(x_1, \alpha_1) \in \text{epi}_f$ et $(x_2, \alpha_2) \in \text{epi}_f$, ainsi epi_f est convexe.

Réciproquement, supposons que epi_f est convexe et montrons la convexité de f .

Soient $x_1, x_2 \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a $(x_1, f(x_1)) \in \text{epi}_f$ et $(x_2, f(x_2)) \in \text{epi}_f$.

Par la convexité de l'épigraphe on déduit que,

$$(1 - \lambda)(x_1, f(x_1)) + \lambda(x_2, f(x_2)) \in \text{epi}_f.$$

Ceci se traduit par

$$(1 - \lambda)(x_1, f(x_1)) + \lambda(x_2, f(x_2)) = ((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)) \in \text{epi}_f,$$

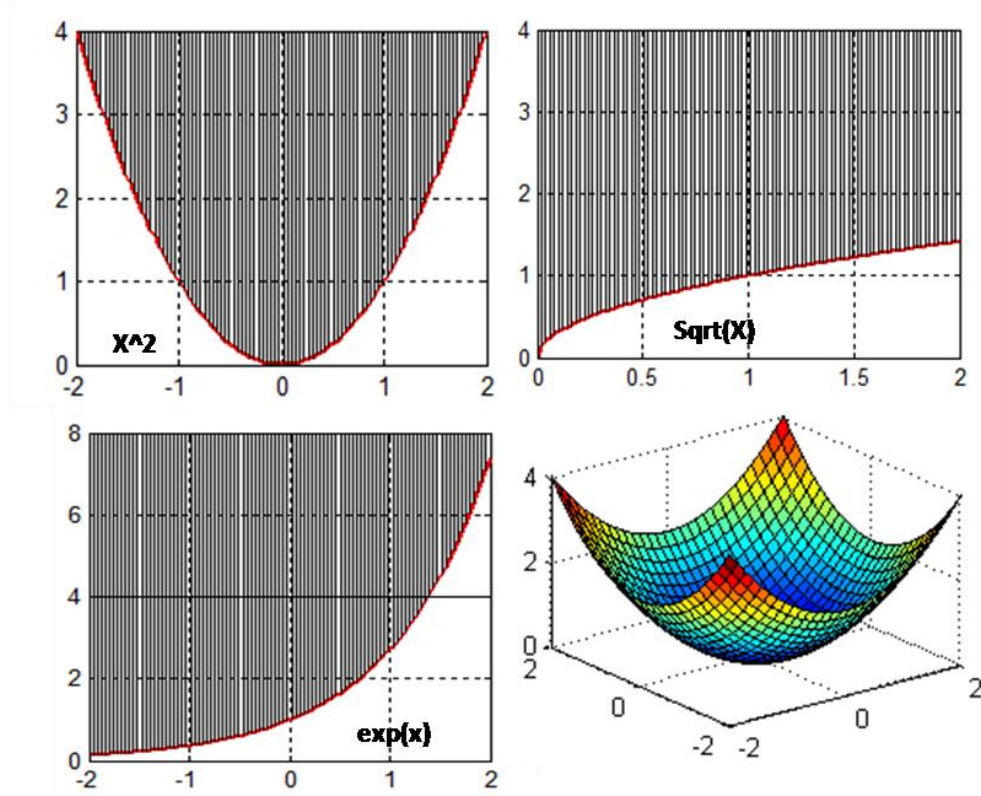
donc

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

D'où le résultat. ■

Exemple 2.6 Les fonctions suivantes sont convexes ou concaves selon la convexité de leurs épigraphe ou hypographe.

- $x \mapsto x^2$ est convexe
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave.
- $x \mapsto \exp(x)$ est convexe.
- $(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ est convexe.



3 Propriétés des fonctions convexes

Proposition 2.3 Soient $f, g : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, avec C convexe, f et g deux fonctions convexes.

1. $f + g$ est convexe.
2. Si $\alpha > 0$, αf est convexe.
3. La fonction $h(x) = \max(f(x), g(x))$ est convexe.

Les fonctions convexes ne peuvent avoir un point de discontinuité qu'aux points frontières de leurs domaine, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 2.1 [3] Soient C un convexe de \mathbb{R}^n d'intérieur non vide et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors, f est continue sur $\text{int}C$ (l'intérieur de C).

Théorème 2.2 (Caractérisation de la convexité par le gradient) Soient $C \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, différentiable. Alors, f est convexe sur C si et seulement si

$$\forall x, y \in C : f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle. \quad (2.3)$$

Preuve. Soit f une fonction convexe i.e.

$$\forall x, y \in C, \lambda \in [0, 1] : f(x + \lambda(y - x)) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x)$$

En retranchant $f(x)$ des deux termes de l'inégalité et en divisant par λ , on obtient

$$\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x).$$

En faisant tendre λ vers 0 et en appliquant le lemme 1.1, on a la nécessité

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} = \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x).$$

Soient à présent $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$. Posons $x_\lambda = x + \lambda(y - x)$. En retranchant respectivement x et y de x_λ , on trouve

$$\begin{cases} x_\lambda - x = \lambda(y - x) \\ x_\lambda - y = (1 - \lambda)(x - y). \end{cases}$$

En appliquant la relation (2.3) à la fonction f respectivement aux point (x, x_λ) et (y, x_λ) , on obtient

$$\begin{cases} f(x) \geq f(x_\lambda) - \lambda \langle \nabla f(x_\lambda), y - x \rangle \\ f(y) \geq f(x_\lambda) + (1 - \lambda) \langle \nabla f(x_\lambda), y - x \rangle. \end{cases}$$

En multipliant respectivement ces deux inégalités par $(1 - \lambda)$ et λ

$$\begin{cases} (1 - \lambda) f(x) \geq (1 - \lambda) f(x_\lambda) - \lambda(1 - \lambda) \langle \nabla f(x_\lambda), y - x \rangle \\ \lambda f(y) \geq \lambda f(x_\lambda) + \lambda(1 - \lambda) \langle \nabla f(x_\lambda), y - x \rangle \end{cases}$$

La somme des deux inégalités donne la relation (2.2) assurant la convexité de f . ■

Théorème 2.3 (Caractérisation de la convexité par la matrice hessienne) Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe ; $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 . Alors,

f est convexe (resp. strictement convexe) sur C si et seulement si pour tout $x \in C$, $\nabla^2 f(x)$ est semi-définie positive (resp. définie positive) sur C i.e.

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \langle y, \nabla^2 f(x) y \rangle \geq 0. \quad (2.4)$$

Preuve. Supposons que f est convexe, et soit $x \in C$. On veut montrer la relation (2.4). Vue que C est ouvert, alors pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, il existe λ suffisamment petit avec $|\lambda| \neq 0$ tel que $x + \lambda y \in C$. Du théorème précédent et la différentiabilité d'ordre 2 de f on a

$$f(x + \lambda y) \geq f(x) + \lambda \langle \nabla f(x), y \rangle, \quad (2.5)$$

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda \langle \nabla f(x), y \rangle + \frac{1}{2} \lambda^2 \langle \nabla^2 f(x) y, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2 \varepsilon(\lambda y). \quad (2.6)$$

En substituant, (2.6) dans (2.5), on trouve

$$\frac{1}{2} \lambda^2 \langle \nabla^2 f(x) y, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2 \varepsilon(\lambda y) \geq 0. \quad (2.7)$$

En divisant la relation (2.7) par λ^2 et en faisant tendre $\lambda \rightarrow 0$, d'où la relation (2.4). Réciproquement, supposons que la matrice hessienne est semidéfinie positive en tout point dans C . Considérons x et y dans C , du développement de Taylor avec reste de la Moyenne, on a

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(\hat{y}) y - x, y - x \rangle \quad (2.8)$$

où $\hat{y} = \lambda x + (1 - \lambda) y$ pour un certain $\lambda \in]0, 1[$. Notons que $\hat{y} \in C$ par convexité, de la semi-définie positivité de la matrice Hessienne $\nabla^2 f(\hat{y})$ et de (2.8), on déduit que

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

Puisque x et y sont quelconques dans C , la convexité de f se déduit du théorème précédent. ■

4 Exercices

Exercice 2.1 Un hyperplan $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble de points vérifiant l'équation $\langle a, x \rangle = \alpha$ c.à.d

$$\Pi = \{x : \langle a, x \rangle = \alpha\}.$$

- Montrer que Π est fermé.
- Montrer que Π est convexe.

Exercice 2.2 Tracer les ensembles suivants sur un plan orthonormé et indiquer ceux qui sont convexes :

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 3\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \geq 5\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 11\}$
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$
7. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| + |x| \leq 1\}$
8. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \frac{1}{1+x^2}\}$

Exercice 2.3 Soient les ensembles

$$S_1 = \{x : 2 \leq x_1 \leq 5, x_2 = 4\}$$

$$S_2 = \{x : x_1 + x_2 \leq 5, -x_1 + x_2 + x_3 \leq 7, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

$$S_3 = \{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 9, x_1 + x_3 = 2\}$$

1. Ces ensembles sont-ils convexes ?
2. Trouver l'intérieur et la fermeture des ces ensembles. Sont-ils convexes ?

Exercice 2.4 Montrer que C est convexe si et seulement si

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i : k \in \mathbb{N}, x_i \in C \text{ et } \alpha_i \in [0, 1] \text{ pour } i = 1, \dots, k, \text{ avec } \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\}.$$

Indication : Démontrer ce résultat par récurrence.

Exercice 2.5 On se donne une famille de fonctions convexes $(f_i)_{i \in I}$ avec I un ensemble quelconque d'indices. On définit la fonction

$$f = \sup_{i \in I} f_i$$

1. Montrer que

$$\text{epi } f = \bigcap_{i \in I} \text{epi } f_i$$

2. En déduire que f est convexe.

Exercice 2.6 Soient $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Si $x_1, x_2, \dots, x_k \in C$ et $\lambda_i \in [0, 1]$ tel que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ montrer que

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i).$$

5 Solutions des exercices

Solution 2.1 Soient les ensembles

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x_1 \leq 5, x_2 = 4\},$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 5, -x_1 + x_2 + x_3 \leq 7, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

et

$$S_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 9, x_1 + x_3 = 2\}.$$

1. Oui, les ensembles S_1, S_2 et S_3 sont convexes car ils sont écrits comme l'intersection des sous ensembles convexes i.e. $S_1 = S_1^1 \cap S_1^2 \cap S_1^3$ avec $S_1^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x_1\}$, $S_1^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 5\}$ et $S_1^3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 4\}$.
2. On a

$$\begin{cases} \overset{\circ}{S}_1 = \emptyset, \bar{S}_1 = S_1 \\ \overset{\circ}{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 < 5, -x_1 + x_2 + x_3 < 7, x_1, x_2, x_3 > 0\}, \bar{S}_2 = S_2 \\ \overset{\circ}{S}_3 = \emptyset, \bar{S}_3 = S_3. \end{cases}$$

Par conséquent, $\overset{\circ}{S}_i, \bar{S}_i$ sont convexes $i = 1, 2, 3$.

Solution 2.2 1. Montrer que $\text{epi } f = \cap_{i \in I} \text{epi } f_i$.

Soit $(x, \alpha) \in \text{epi } f$. On a,

$$f(x) \leq \alpha,$$

\Leftrightarrow

$$\sup_{i \in I} f_i(x) \leq \alpha,$$

\Leftrightarrow

$$f_i(x) \leq \alpha, \forall i \in I,$$

\Leftrightarrow

$$(x, \alpha) \in \cap_{i \in I} \text{epi } f_i.$$

D'où $\text{epi } f = \cap_{i \in I} \text{epi } f_i$.

2. Comme les fonctions f_i sont convexes, donc $\text{epi } f_i$ est convexe pour tout $i \in I$, ce qui implique que $\text{epi } f = \cap_{i \in I} \text{epi } f_i$ est convexe, alors f est convexe.

Solution 2.3 Soient $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Si $x_1, x_2, \dots, x_k \in C$ et $\lambda_i \in [0, 1]$ tel que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ montrer que

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i). \quad (2.9)$$

On démontre par récurrence. Pour $k = 1$ la propriété 2.9 est triviale. Pour $k = 2$, ça découle immédiatement de la définition d'une fonction convexe

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Maintenant, on suppose que la propriété est vraie au rang k et on montre qu'elle est vraie au rang $k+1$ i.e. pour $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in C$ et $\lambda_i \in [0, 1]$ tel que $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$ montrer que

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i).$$

On a,

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i + \lambda_{k+1} = 1$$

donc,

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 - \lambda_{k+1} \quad (2.10)$$

En divisant l'équation 2.10 par $1 - \lambda_{k+1}$, on obtient,

$$\frac{1}{1 - \lambda_{k+1}} \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,$$

ce qui donne,

$$\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} = 1.$$

On a

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) = f\left((1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right).$$

On note par

$$z = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} x_i.$$

Comme l'ensemble C est convexe alors (voir l'exercice 4) $z \in C$, et par ailleurs, par la convexité de f , on a

$$f\left((1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right) \leq (1 - \lambda_{k+1}) f\left(\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} x_i\right) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}).$$

d'après l'hypothèse de récurrence,

$$f\left(\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} f(x_i).$$

D'où le résultat.

Chapitre 3

Résultats d'existence et d'unicité

Dans ce chapitre, on présente des hypothèses sous lesquelles le problème

$$\inf_{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n} f(x) \quad (3.1)$$

admet au moins une solution i.e. $f(x^*) = \min_{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n} f(x)$, avec $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

On définit le domaine de f par,

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) < +\infty\}.$$

On dit que f est propre si elle ne vaut jamais $-\infty$ et $\text{dom}(f) \neq \emptyset$

1 Extremums d'une fonction

La fonction f peut avoir des valeurs extrémales : des minima (les plus petites valeurs) ou des maxima (les plus grandes valeurs) sur tout le domaine de définition Ω ou bien sur une certaine partie.

Définition 3.1 Soient Ω un ensemble de \mathbb{R}^n et f une fonction de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (voir la figure 3.1).

1. On dit que f admet un minimum global au point $x^* \in \Omega$ si

$$\forall x \in \Omega, f(x^*) \leq f(x). \quad (3.2)$$

2. On dit que f admet un maximum global au point $x^* \in \Omega$ si

$$\forall x \in \Omega, f(x^*) \geq f(x). \quad (3.3)$$

3. Le minimum est appelé strict si

$$\forall x \in \Omega, \text{ avec } x \neq x^*, f(x^*) < f(x). \quad (3.4)$$

4. Le maximum est appelé strict si

$$\forall x \in \Omega, \text{ avec } x \neq x^*, f(x^*) > f(x). \quad (3.5)$$

5. On dit que f admet un minimum local au point $x^* \in \Omega$ s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in B(r, x^*) \cap \Omega, f(x^*) \leq f(x). \quad (3.6)$$

6. On dit que f admet un maximum local au point $x^* \in \Omega$ s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in B(r, x^*) \cap \Omega, f(x^*) \geq f(x). \quad (3.7)$$

7. On dit que x^* est un minimum local strict de f sur Ω , s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in B(r, x^*) \cap \Omega \text{ avec } x \neq x^*, f(x^*) < f(x). \quad (3.8)$$

8. On dit que x^* est un maximum local strict de f sur Ω , s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in B(r, x^*) \cap \Omega \text{ avec } x \neq x^*, f(x^*) > f(x). \quad (3.9)$$

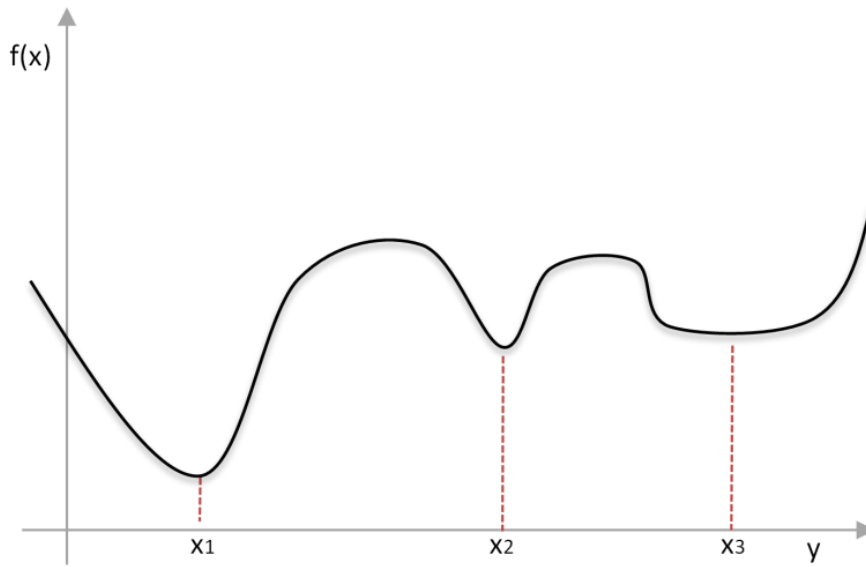


FIGURE 3.1 – x_1 : minimum global strict, x_2 : minimum local strict et x_3 : minimum local (non strict) .

Exemple 3.1 La fonction $f(x) = x^2$ admet un minimum strict au point $x^* = 0$ sur \mathbb{R} .

Exemple 3.2 La fonction $f(x) = \cos(x)$ admet des minimums globaux aux points $x^* = k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et k impair, elle admet des maximums globaux aux points $x^* = k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et k pair sur \mathbb{R} .

Exemple 3.3 La fonction partie entière $E(x)$ admet un maximum local non strict au point $x^* = 1$ sur \mathbb{R} .

Le théorème suivant montre qu'un minimum local d'une fonction convexe est également un minimum global :

Théorème 3.1 Soient Ω un ensemble convexe de \mathbb{R}^n et f une fonction convexe de Ω dans \mathbb{R} . Alors, si x^* est un minimum local, x^* est également un minimum global.

Preuve. On procède par l'absurde, on suppose que la fonction f admet un minimum local au point x^* qui vérifie la relation (3.6) tel que x^* n'est pas un minimum global, donc

$$\exists x \in \Omega : f(x) < f(x^*). \quad (3.10)$$

Il est clair que pour un vecteur quelconque x de $B(r, x^*)$, et pour un λ suffisamment petit dans $]0, 1[$, on a

$$f(x) \leq f(x^* + \lambda(x - x^*)).$$

On pose $y = x^* + \lambda(x - x^*)$, donc $y \in B(r, x^*)$. Puisque f est convexe, on a

$$f(y) = f(x^* + \lambda(x - x^*)) \leq (1 - \lambda)f(x^*) + \lambda f(x),$$

de l'inéquation (3.10), on obtient

$$f(y) < (1 - \lambda)f(x^*) + \lambda f(x^*) = f(x^*).$$

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse x^* est un minimum local. ■

2 Existence d'un extremum

Afin de garantir l'existence et l'unicité d'un minimum global, on doit faire des hypothèses sur la fonction objectif et l'ensemble de contraintes Ω . En effet, l'existence d'extrema n'est pas garantie pour toute fonction, mais pour une fonction continue sur un compact (ensemble fermé et borné) on a le théorème classique de Weierstrass suivant :

Théorème 3.2 (Théorème de Weierstrass [6, 8, 9]) Soient Ω un compact de \mathbb{R}^n et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est une fonction continue sur Ω alors f admet un minimum et un maximum global sur Ω i.e.

$$\exists x^* \in \Omega : \inf_{x \in \Omega} f(x) = \min_{x \in \Omega} f(x) = f(x^*),$$

et

$$\exists \hat{x} \in \Omega : \sup_{x \in \Omega} f(x) = \max_{x \in \Omega} f(x) = f(\hat{x}).$$

Remarque 3.1 Sur \mathbb{R} les compacts sont les intervalles fermés $[a, b]$.

Exemple 3.4 Soit f une fonction définie de $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|^2 \leq 1\}$ dans \mathbb{R} , $x \rightarrow x_1 + x_2$. L'ensemble Ω est un compact, donc d'après le théorème de Weierstrass la fonction f est bornée (voir la figure 3.2).

La recherche d'un extremum ne se limite pas à un ensemble fermé borné, dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, on ne peut pas appliquer le théorème de Weierstrass. Un autre concept utile pour l'existence d'un minimum global est introduit dans la définition suivante :

Définition 3.2 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f est dite coercive si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

i.e. la fonction f doit être grande quand $\|x\|$ est grand.

Exemple 3.5 La fonction x^2 , est coercive.

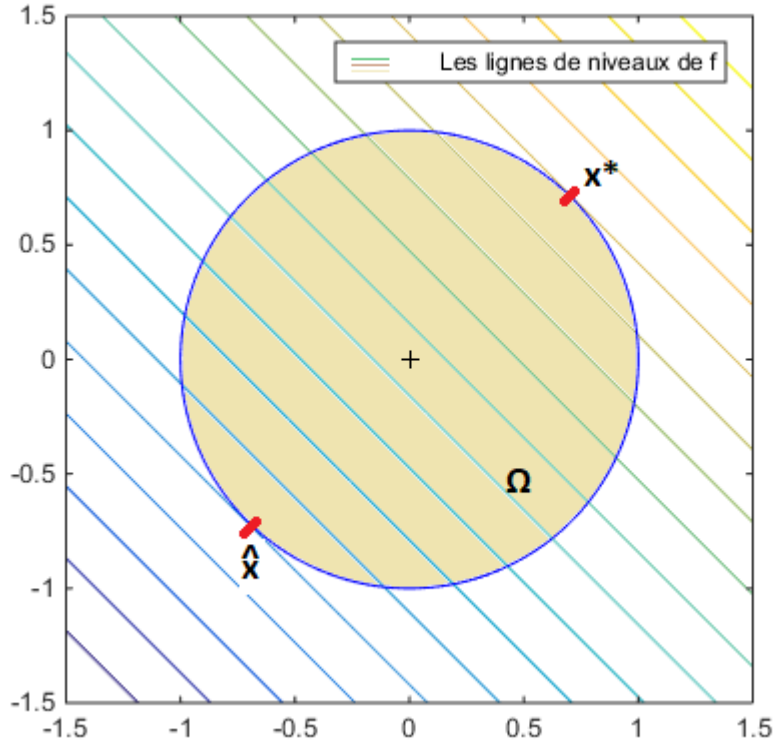


FIGURE 3.2 – La fonction f possède un minimum au point $\hat{x} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et un maximum au point $x^* = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exemple 3.6 *Un autre exemple d'une fonction coercive est la fonction f définie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} par,*

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Exemple 3.7 *Soit la fonction*

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2.$$

f n'est pas coercive, car si on considère la suite $x_n = (0, n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = +\infty$$

alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty.$$

Exemple 3.8 *La fonction $f(x) = x^3$, n'est pas coercive ($f \rightarrow -\infty, x \rightarrow -\infty$)*

Exemple 3.9 *La fonction $f(x) = \exp(x)$, n'est pas coercive ($f \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty$)*

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, on a le résultat suivant :

Théorème 3.3 *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, une fonction propre, continue et coercive. Alors le problème 3.1 admet au moins une solution.*

Preuve. On note $d = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$, comme f est propre, alors

$$d < +\infty. \tag{3.11}$$

De la définition de l'inf, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x(\varepsilon) : f(x) - \varepsilon < d.$$

Pour $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, on trouve

$$\forall n > 0, \exists x_n : f(x_n) - \frac{1}{n} < d,$$

ce qui donne

$$d < f(x_n) < d + \frac{1}{n}.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite minimisante et elle vérifie,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = d.$$

Maintenant, on veut montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. En effet, on raisonne par l'absurde, on suppose que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = +\infty$, la coercivité de f , implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$, ceci est en contradiction avec (3.11), d'où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Alors, on peut extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite convergente,

$$(x_{n_k})_{n_k} / \lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x^*,$$

donc,

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x^*) = d.$$

D'où, le problème admet une solution. ■

Exemple 3.10 $f(x) = x^2$ est coercive et continue sur \mathbb{R} , donc elle admet un minimum au point $x^* = 0$.

Exemple 3.11 $f(x) = x^3$ n'est pas coercive et elle n'admet pas de minimum sur \mathbb{R} .

Exemple 3.12 $f(x) = -\exp(-\frac{x^2}{4})\cos(x)$ n'est pas coercive mais elle admet un minimum au point $x^* = 0$. D'où la coercivité est une condition suffisante mais pas nécessaire dans le théorème 3.3.

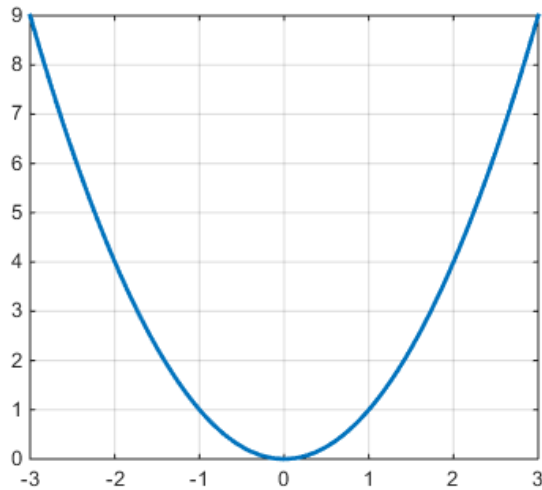


FIGURE 3.3 – Graphe de la fonction $f(x) = x^2$

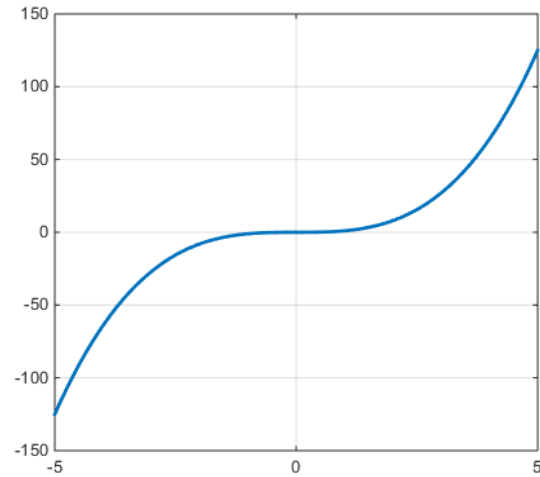


FIGURE 3.4 – Graphe de la fonction $f(x) = x^3$

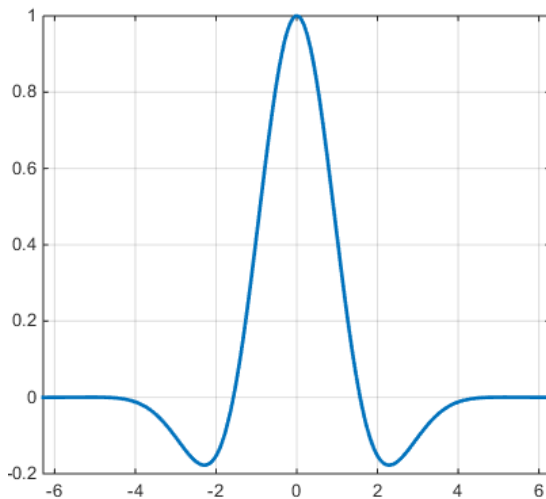


FIGURE 3.5 – Graphe de la fonction $f(x) = -\exp(-\frac{x^2}{4})\cos(x)$

3 unicité d'un extremum

Un concept important pour l'unicité est la convexité stricte.

Théorème 3.4 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si f est strictement convexe, alors le problème (3.1) admet au plus une solution.

Preuve. On démontre par l'absurde. On suppose qu'il existe deux solutions globales x_1, x_2 avec $x_1 \neq x_2$ (ici $f(x_1) = f(x_2)$) pour (3.1). Comme f est strictement convexe et pour $\lambda = \frac{1}{2}$, on obtient

$$f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) < \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) = f(x_2),$$

ceci est en contradiction avec le fait que $f(x_2)$ est la plus petite valeur. ■

Exemple 3.13 Soit f une fonction définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , $x = (x_1, x_2) \rightarrow f(x) = x_1^2 + x_2^2$. En calculant sa matrice hessienne, on trouve,

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0,$$

donc, f est strictement convexe. D'après les résultats vus dans la section précédente f est aussi propre et coercive et donc elle admet un seul minimum globale au point $x^* = (0, 0)$.

Définition 3.3 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, avec $f \in C^1$. On dit que f est une fonction elliptique de constante $\alpha > 0$ si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2.$$

Théorème 3.5 Si la fonction objectif f du problème (3.1) est elliptique et coercive, alors f est strictement convexe, en particulier le problème (3.1) admet une unique solution optimale.

4 Exercices

Exercice 3.1 On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \Omega} f(x). \quad (3.12)$$

Etudier l'existence et l'unicité des solutions du problème (3.12) pour les différentes conditions suivantes :

1. $f(x) = x^2$ et
 - a) $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$.
 - b) $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$.
 - c) $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\}$.
 - d) $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$.
2. $f(x) = x_1 + x_2$ et
 - a) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|^2 \leq 1\}$.
 - b) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|^2 \geq 1\}$.
 - c) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 \leq 1 - x_2\}$.
 - d) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

Exercice 3.2 (L'inégalité de rayleigh) On note par $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques carrées d'ordre n .

1. Montrer que si $H \in S_n(\mathbb{R})$ et définie positive alors il existe une constante $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\langle x, Hx \rangle \geq \alpha \|x\|^2$$

2. Soit $H \in S_n(\mathbb{R})$ et définie positive. En déduire que la fonction quadratique

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Hx \rangle + \langle x, b \rangle + c$$

est coercive.

3. En déduire que le problème d'optimisation $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ admet une unique solution.

Indication 3.1 Soit une matrice $H \in S_n(\mathbb{R})$. Rappelons qu'il existe une matrice orthogonale O , formée de vecteurs propres de H , tel que

$$H = O^T D O$$

où la matrice D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de H .

Exercice 3.3 Supposons que x^* est un minimum local de f sur Ω , et $\Omega \subset \Omega'$. Montrer que si x^* est un point intérieur de Ω , alors x^* est un minimum local de f sur Ω' . Montrer que la même conclusion ne peut pas être donnée si x^* n'est pas un point intérieur dans Ω .

Chapitre 4

Conditions d'optimalités

L'objectif de ce chapitre est de donner les conditions nécessaires ou suffisantes, pour qu'un point x^* soit un minimum local, pour le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (4.1)$$

Définition 4.1 Soit $f \in C^1$. Un point critique ou stationnaire, c'est un point qui vérifie $\nabla f(x^*) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Exemple 4.1 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^2

$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2,$$

Les points critiques de la fonction f , sont les solutions de l'équation suivante :

$$\nabla f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

ce qui implique

$$\begin{pmatrix} 6x^2 + y^2 + 10x \\ 2xy + 2y \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2},$$

alors,

$$S = \left\{ (0, 0), \left(\frac{-5}{3}, 0 \right), (-1, 2), (-1, -2) \right\}.$$

Définition 4.2 Un point critique est un point selle si $\forall r > 0, \exists a, b \in B(x^*, r)$ tel que $f(a) < f(x^*) < f(b)$.

Exemple 4.2 Soit la fonction $f(x) = x^3$. On a

$$f'(x) = 3x^2$$

f' s'annule au point $x = 0$. Soit $r > 0, \in B(0, r) =]-r, r[$. On a pour $a = \frac{-r}{2}$ et $b = \frac{r}{2}$

$$f(a) = \frac{-r^3}{8} < f(b) = \frac{r^3}{8},$$

d'où $x = 0$ est un point selle.

1 Conditions d'optimalités du premier ordre

Notre premier résultat indique que la dérivée première doit être nulle à chaque fois qu'on a un problème d'optimisation sans contraintes.

Théorème 4.1 (Condition nécessaire du premier ordre) *Si x^* est un minimum local de la fonction f sur \mathbb{R}^n , alors $\nabla f(x^*) = 0_{\mathbb{R}^n}$.*

Preuve. Soit x^* un minimum local de f sur \mathbb{R}^n . La définition d'un minimum local assure l'existence d'une boule ouverte telle que :

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in B(x^*, r),$$

pour n'importe quel vecteur d de \mathbb{R}^n et un scalaire $t > 0$ suffisamment petit, le point $x = x^* + td$ est un élément de $B(x^*, r)$, et donc

$$f(x^*) \leq f(x^* + td).$$

Ceci implique que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x^* + td) - f(x^*)}{t} = \nabla f(x^*)^T d \geq 0.$$

Ce résultat est vrai pour tout point de \mathbb{R}^n , donc il est vrai pour $-d$ i.e.

$$-\nabla f(x^*)^T d \geq 0,$$

et en même temps on a,

$$-\nabla f(x^*)^T d \leq 0, \forall d \in \mathbb{R}^n,$$

et alors $\nabla f(x^*) = 0$. ■

Exemple 4.3 Soient $f(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_2 + \frac{9}{2}$ et $\Omega = \mathbb{R}^2$.

On a

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 + 3 \end{pmatrix}.$$

1. Pour $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, dans ce cas $\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Donc, x^* ne vérifie pas la condition nécessaire d'ordre 1.
2. Pour $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ on a $\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors x^* vérifie la condition nécessaire d'ordre 1.

Remarque 4.1 Lorsque la fonction f n'est pas convexe, on ne peut donner qu'une condition nécessaire et suffisante d'optimalité locale.

Cette condition est nécessaire mais pas suffisante. En effet, il est possible que la différentielle soit nulle en un point x^* et que ce point ne soit pas un minimum local.

Exemple 4.4 Dans le cas où $f(x) = x^3$, f' s'annule au point $x^* = 0$, alors que ce point est un point selle (il n'est donc ni un minimum ni un maximum).

La condition ci-dessus utilise le vecteur gradient, par conséquent, on l'appelle une condition de premier ordre.

2 Conditions d'optimalités du second ordre

Si la fonction objectif est ni convexe, ni concave, les conditions du premier ordre nous ne permettent pas de distinguer entre un minimum et un maximum. Pour obtenir une telle distinction on doit étudier le comportement de la différentielle d'ordre 2 en x^* . On a alors la condition d'optimalité suivante :

Théorème 4.2 (Condition nécessaire du second Ordre) *Si x^* est un minimum local (resp. maximum local) de la fonction f sur \mathbb{R}^n , alors $\nabla f(x^*) = 0$ et $d^T \nabla^2 f(x^*) d \geq 0$ pour tout $d \in \mathbb{R}^n$ (resp. $d^T \nabla^2 f(x^*) d \leq 0$ pour tout $d \in \mathbb{R}^n$).*

Preuve. A l'aide du développement de Taylor d'ordre 2 de f autour du minimum local x^* , on obtient pour tout $d \in \mathbb{R}^n$ et pour $t > 0$ et suffisamment petit,

$$f(x^*) \leq f(x^* + td) = f(x^*) + t \nabla f(x^*)^T d + \frac{1}{2} t^2 d^T \nabla^2 f(x^*) d + t^2 \|d\|^2 \varepsilon(td),$$

on sait que $\nabla f(x^*) = 0$, donc

$$f(x^* + td) = f(x^*) + \frac{1}{2} t^2 d^T \nabla^2 f(x^*) d + t^2 \|d\|^2 \varepsilon(td),$$

En divisant par t^2 et par passage à la limite, on trouve

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x^* + td) - f(x^*)}{t^2} = \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d \geq 0.$$

■

Exemple 4.5 Soit $f(x) = x_1^2 - x_2^2$ et $\Omega = \mathbb{R}^2$. Pour $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $\nabla f(x^*) = 0_{\mathbb{R}^2}$ et $\nabla^2 f(x^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. On remarque que $\nabla^2 f(x^*)$ n'est pas semi définie positive alors x^* n'est pas un minimum local ni un maximum local.

De plus si la condition de second ordre est strictement satisfaite, on obtient la condition suffisante suivante :

Théorème 4.3 (Condition d'optimalité suffisante du second ordre) *Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$. Si x^* vérifie*

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ \langle d, \nabla^2 f(x^*) d \rangle > 0, \forall d \neq 0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Alors x^ est un minimum local strict de la fonction f sur \mathbb{R}^n .*

La démonstration de ce théorème fait appel au lemme suivant :

Lemme 4.1 *Soient f une fonction deux fois continûment différentiable sur \mathbb{R}^n , et $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $D^2 f(x^*)$ est définie positive. Alors il existe $\delta > 0$ tel que*

$$D^2 f(x) > 0, \forall x \in B(x^*, \delta).$$

Preuve. D'après le lemme 4.1, il existe $\delta > 0$ tel que $\nabla^2 f(x) > 0$ pour tout $x \in B(x^*, \delta)$.

Soit $x \in B(x^*, \delta)$ avec $x \neq x^*$, on pose $\phi(t) = f(x^* + t(x - x^*))$ avec $t \in [0, 1]$. Il est clair que ϕ est deux fois continûment différentiable sur $[0, 1]$. De plus, on a,

$$\phi(0) = f(x^*), \quad (4.2)$$

et

$$\phi(1) = f(x). \quad (4.3)$$

D'après le théorème de Taylor, il existe $\hat{t} \in [0, 1]$ tel que,

$$\phi(t) = \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2}\phi''(\hat{t})t^2, \quad (4.4)$$

avec,

$$\begin{aligned} \phi'(0) &= \nabla f(x^*)^T (x - x^*) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi''(\hat{t}) &= (x - x^*)^T \nabla^2 f(x^* + \hat{t}(x - x^*)) (x - x^*) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Pour $t = 1$, on obtient,

$$\begin{aligned} \phi(1) - \phi(0) &= f(x) - f(x^*) \\ &= \frac{1}{2}\phi''(\hat{t}) \\ &> 0. \end{aligned}$$

D'où x^* est un minimum local strict. ■

Exemple 4.6 Soit $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ et $\Omega = \mathbb{R}^2$. Pour $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $\nabla f(x^*) = 0_{\mathbb{R}^2}$ et $\nabla^2 f(x^*) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0$. Alors x^* est un minimum local strict de f sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 4.7 On considère la fonction f de l'exemple 4.2. En calculant la matrice hessienne, on trouve

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 12x + 10 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{bmatrix}.$$

On a,

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0,$$

donc le point $(0, 0)$ est un minimum local strict.

On a,

$$\nabla^2 f\left(\frac{-5}{3}, 0\right) = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{bmatrix} < 0,$$

donc le point $(\frac{-5}{3}, 0)$ est un maximum local strict.

Pour le point $(-1, 2)$, on a,

$$\nabla^2 f(-1, 2) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Le signe de la matrice $\nabla^2 f(-1, 2)$ est non-définie donc $(-1, 2)$ est un point selle.

$$\nabla^2 f(-1, -2) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Le signe de la matrice $\nabla^2 f(-1, -2)$ est non-définie donc $(-1, -2)$ est un point selle.

3 Exercices

Exercice 4.1 On considère le problème d'optimisation

$$\min_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 5.$$

La condition nécessaire du premier ordre pour un minimum local est-elle vérifiée au points $[1, 1]^\top$, $[-1, -1]^\top$, $[0, 1]^\top$ et $[0, -1]^\top$?

Exercice 4.2 Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1. Appelons D l'ensemble des contraintes. Tracer sur un plan orthonormé D , est-il convexe ? justifier.
2. Le point $[1, 1]^\top$ est-il optimal ?
3. Trouver géométriquement la solution optimale.

Exercice 4.3 Considérons le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \min f(x) = -x_1 - 4x_2 \\ x_1 \geq 0 \\ -x_1 \geq -2 \\ x_2 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 + 3.5 \geq 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 6 \geq 0 \end{cases}$$

- a) Tracer sur un plan orthonormé l'ensemble des contraintes.
- b) Montrer que l'ensemble des contraintes est convexe.
- d) Préciser sur le schéma donné en (a), les points pour les quels f vaut 0, -4 et -6.
- e) En déduire graphiquement la solution et la valeur optimale du problème.

Exercice 4.4 Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la fonction

$$f_a : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y.$$

- a) Pour quelles valeurs de a , la fonction f_a est-elle convexe ? Et strictement convexe ?
 b) Déterminer les valeurs du paramètre a , Pour lesquelles le problème

$$\begin{cases} \inf f_a(x, y) \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}.$$

admet une solution unique. Donner la solution optimale dans ce cas .

Exercice 4.5 Soit le problème

$$\begin{cases} \min (x_1 - \frac{3}{2})^2 + (x_2 - 5)^2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

1. Sur un plan orthonormé, hachurer l'ensemble Ω des contraintes.
2. Montrer que la fonction objective et les contraintes sont convexes.
3. Trouver géométriquement la solution optimale x^* du problème.

Exercice 4.6 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction convexe est continue. Considérons le problème (P) de minimisation de f sur \mathbb{R}^n . Notons par

$$S = \{x^* : \text{solution optimale du problème (P)}\}.$$

Montrer que S est convexe.

Exercice 4.7 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^\top \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} x + x^\top \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 6, \quad x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2.$$

1. Calculer le gradient et la matrice hessienne de f au point $(1, 1)^\top$.
2. Trouver tous les points qui vérifient la CN1.
3. Voir si ces points vérifient la CN2 (pour un min).

Exercice 4.8 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^\top \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + x^\top \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 7, \quad x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2.$$

1. Calculer la dérivée directionnelle de la fonction f au point $(0, 1)^\top$ à la direction $(1, 0)^\top$.
2. Trouver tous les points qui satisfaisant la condition nécessaire du premier ordre pour f . Est-ce que f admet un min sur \mathbb{R}^2 ? Si oui, trouvez tous les minimiseurs ; sinon, expliquer pourquoi f ne peut pas admettre un min.

4 Solutions des exercices

Solution 4.1

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 5$$

donc

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 + 2 \end{pmatrix}$$

Pour $\hat{x} = [1, 1]^T$, on a

$$\nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc le point ne vérifie pas la condition nécessaire d'ordre 1.

Remarque 4.2 $\hat{x} = (1, 1)^T$ n'est pas un min local

Pour $\hat{x} = (-1, -1)^T$, on a

$$\nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc ce point ne vérifie pas la condition nécessaire d'ordre 1.

Pour $\hat{x} = (0, 1)^T$, on a

$$\nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc ce point ne vérifie pas la condition nécessaire d'ordre 1.

Pour $\hat{x} = (0, -1)^T$, on a

$$\nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc ce point vérifie la condition nécessaire d'ordre 1.

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0 \implies \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \geq 0$$

ce point vérifie la condition nécessaire d'ordre 2.

Le point vérifie la condition suffisante d'ordre 2 $\nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0$.

Solution 4.2 Voir la figure 4.1.

Solution 4.3 Soit la fonction suivante

$$f_a(x, y) = x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y.$$

On a

$$\nabla f_a(x, y) = \begin{bmatrix} 2x + ay - 2 \\ 2y + ax - 2 \end{bmatrix}$$

et

$$\nabla^2 f_a(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{bmatrix}$$

Pour que f_a soit convexe, il faut que $\nabla^2 f_a(x, y) \geq 0$.

On calcule les mineurs principaux :

$$\Delta_{11} = 2, \Delta_{12} = 2, \Delta_2 = 4 - a^2.$$

Il est clair que $\Delta_2 \geq 0$, ssi

$$a \in [-2, 2].$$

On remarque aussi que f_a est strictement convexe, ssi $a \in]-2, 2[$.

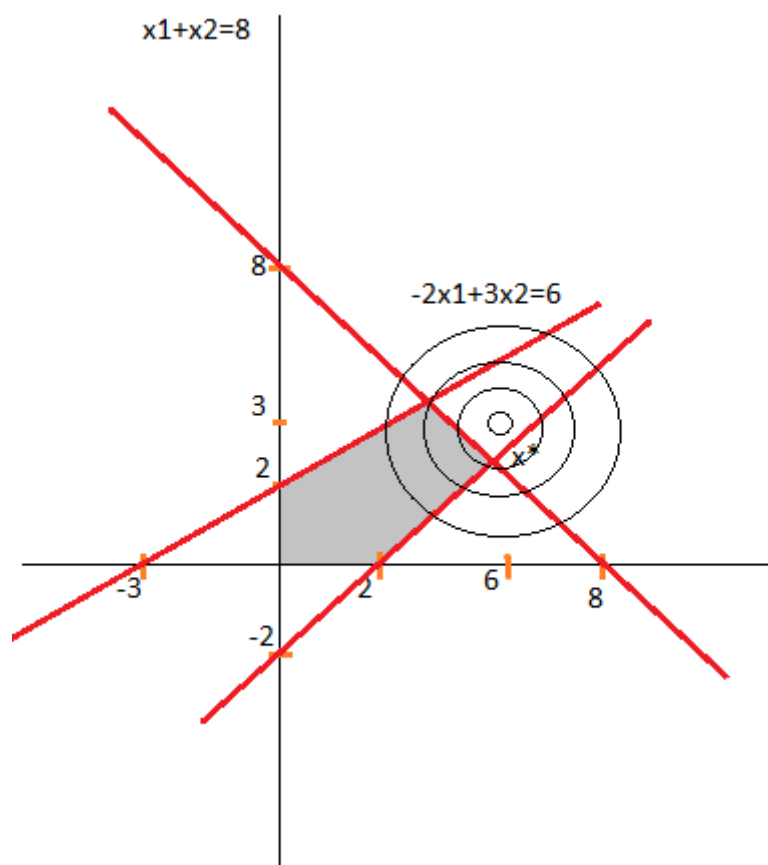


FIGURE 4.1 – Solution géométrique de l'exercice 2, chapitre 4.

Chapitre 5

Méthode du gradient

Ce chapitre introduit une classe importante d'algorithmes de résolution des problèmes d'optimisation sans contrainte. Le concept central est celui de direction de descente.

1 Ordre de convergence d'une suite

Dans cette section, on introduit la notion d'ordre de convergence d'une suite numérique $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ qui sera utile dans le reste du cours. Plus l'ordre de convergence est élevé plus la convergence de la méthode est rapide et le temps de calcul pour déterminer la solution est moindre.

Définition 5.1 (L'ordre de convergence) On appelle ordre de convergence d'une suite $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente de limite x^* l'entier positif p (s'il existe) tel que

$$0 < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x^*\|}{\|x^{(k)} - x^*\|^p} = r < \infty.$$

r est appelé le taux de convergence.

- Si $p = 1$ et $0 < r < 1$ alors la convergence est linéaire.
- Si $p = 1$ et $r = 0$ alors la convergence est superlinéaire.
- Si $p = 1$ et $r = 1$ alors la convergence est sous-linéaire.
- Si $p = 2$ alors la convergence est quadratique.
- Si $p = 3$ alors la convergence est cubique.

Exemple 5.1 Soit $x_k = \frac{2}{k}$. On a,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = \begin{cases} 0, p = 0 \\ 1, p = 1 \\ +\infty, p > 1. \end{cases}$$

Alors la convergence est sous-linéaire d'ordre 1.

Exemple 5.2 Soit $x_k = \frac{1}{3^k}$. On a,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = 3^{k(p-1)-1} = \begin{cases} 0, p = 0 \\ \frac{1}{3}, p = 1 \\ +\infty, p > 1. \end{cases}$$

Donc la convergence est linéaire d'ordre 1 et de taux $r = \frac{1}{3}$.

2 Méthode de descente

Pour définir les méthodes de descente, on a besoin de la notion de direction de descente.

Définition 5.2 (Direction de descente) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Le vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ est appelé *direction de descente* en $x \in \mathbb{R}^n$ s'il existe $\alpha^* > 0$ tel que

$$f(x + \alpha d) < f(x), \forall \alpha \in]0, \alpha^*].$$

Exemple 5.3 On considère la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$. Soient $\alpha^* = \frac{1}{2}$, $(\hat{x}, \hat{y})^T = (1, 1)^T$ et $d^{(1)} = (-1, -1)^T$. On a,

$$f((\hat{x}, \hat{y})^T + \alpha d^{(1)}) = (1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^2 < f((\hat{x}, \hat{y})) = 2, \forall \alpha \in]0, \alpha^*].$$

Alors $d^{(1)}$ est une direction de descente au point (\hat{x}, \hat{y}) .

Le vecteur $d^{(2)} = (1, 1)^T$ n'est pas une direction de descente au point (\hat{x}, \hat{y}) , car $\forall \alpha^* > 0$

$$f((\hat{x}, \hat{y})^T + \alpha d^{(2)}) = (1 + \alpha)^2 + (1 + \alpha)^2 > f((\hat{x}, \hat{y})) = 2, \forall \alpha \in]0, \alpha^*].$$

Le résultat suivant est une caractérisation importante d'une direction de descente en un point x :

Proposition 5.1 Soient f une fonction continûment différentiable sur \mathbb{R}^n , $x, d \in \mathbb{R}^n$ alors,

1. si d est une direction de descente en x , alors $\langle \nabla f(x), d \rangle \leq 0$
2. si $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$, alors d est une direction de descente en x .

Preuve.

1. Soit d une direction de descente en x , alors par définition il existe une constante $\alpha^* > 0$ telle que,

$$f(x + \alpha d) < f(x), \forall \alpha \in]0, \alpha^*].$$

On pose $\phi(\alpha) = f(x + \alpha d)$. Soit $\alpha \in]0, \alpha^*]$, alors,

$$\phi(\alpha) < \phi(0).$$

Ce qui implique,

$$\phi(\alpha) - \phi(0) < 0.$$

En divisant par α , on trouve,

$$\frac{\phi(\alpha) - \phi(0)}{\alpha} < 0,$$

par passage à la limite, on obtient,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\phi(\alpha) - \phi(0)}{\alpha} = \phi'(0) = \langle \nabla f(x), d \rangle \leq 0.$$

2. Exercice à faire.

■

Exemple 5.4 On revient à l'exemple 5.3. On a,

$$\nabla f(\hat{x}, \hat{y}) = (2, 2)^T$$

donc,

$$\langle \nabla f(\hat{x}, \hat{y}), d^{(1)} \rangle = -4 < 0,$$

alors $d^{(1)}$ est une direction de descente en (\hat{x}, \hat{y}) .

Pour l'autre direction $d^{(2)}$, on a,

$$\langle \nabla f(\hat{x}, \hat{y}), d^{(2)} \rangle = 4 > 0,$$

alors $d^{(2)}$ n'est pas une direction de descente en (\hat{x}, \hat{y}) . En effet, l'ensemble de directions de descente en (\hat{x}, \hat{y}) est l'ensemble des vecteurs qui forment un angle obtus avec le vecteur $\nabla f(\hat{x}, \hat{y})$ comme il est montré dans la figure 5.1.

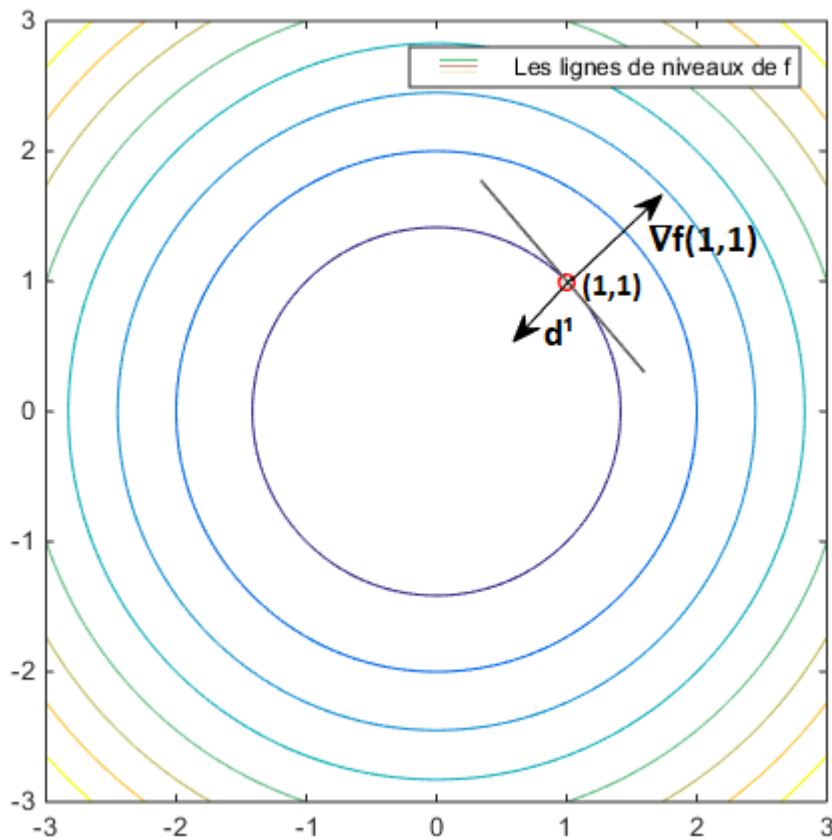


FIGURE 5.1 – Représentation graphique des directions de descente.

Remarque 5.1 Les méthodes de descente diffèrent par le choix de d et α .

L'algorithme général pour une méthode de descente est le suivant :

Algorithm 5.1 Méthode de descente

Etape I : $k = 0, \epsilon$ et $x^{(0)}$

Etape II :

- * Trouver la direction de descente $d^{(k)}$.
- * Trouver le pas de descente α_k .

* Calculer $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$.
 Etape III : Si $\|\nabla f(x^{(k+1)})\| < \varepsilon$ stop, $x^* = x^{(k+1)}$ sinon $k = k + 1$, aller à l'étape II.

3 Méthode du gradient

Dans la méthode du gradient, on choisit $d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$ comme direction de descente, car, si $\nabla f(x^{(k)}) \neq 0$, alors $\langle -\nabla f(x^{(k)}), \nabla f(x^{(k)}) \rangle = -\|\nabla f(x^{(k)})\|^2 < 0$.

Il y a ensuite de nombreuses façon d'utiliser cette direction de descente. Si on utilise un pas fixe i.e. $\alpha_k = \alpha$, on obtient alors la méthode du gradient à pas fixe :

- $d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$
- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha d^{(k)}$.

Dans le cas d'une fonction quadratique,

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle x, b \rangle + c,$$

avec $A \in \mathbb{M}_n$ symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$, on a le résultat de convergence suivant :

Théorème 5.1 Soient l la plus petite valeur propre de A et L la plus grande valeur propre de A . Si $\alpha \in]0, \frac{2}{L}[$, alors la convergence de la méthode du gradient à pas fixe est linéaire à un taux inférieur à $\max(|1 - \alpha L|, |1 - \alpha l|)$.

Preuve. On a,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha (Ax^{(k)} + b), \quad (5.1)$$

et

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \alpha (Ax^{(k-1)} + b). \quad (5.2)$$

En faisant la différence entre les deux relations 5.1 - 5.2, on trouve

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = x^{(k)} - x^{(k-1)} - \alpha A (x^{(k)} - x^{(k-1)})$$

ce qui implique

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = (I_n - \alpha A) (x^{(k)} - x^{(k-1)}),$$

et par suite,

$$\begin{aligned} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| &= \|(I_n - \alpha A) (x^{(k)} - x^{(k-1)})\| \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i(I_n - \alpha A)| \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|. \end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$1 - \alpha L \leq \lambda_i(I_n - \alpha A) \leq 1 - \alpha l,$$

et donc,

$$\max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i(I_n - \alpha A)| = \max(|1 - \alpha L|, |1 - \alpha l|).$$

Par conséquent, la suite $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente si $\max(|1 - \alpha L|, |1 - \alpha l|) < 1$, ce qui correspond à,

$$\alpha \in \left]0, \frac{2}{L}\right[\text{ et } \left]0, \frac{2}{l}\right[,$$

donc,

$$\alpha \in \left] 0, \frac{2}{L} \right[.$$

■

Exemple 5.5 Soit la fonction quadratique $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 2xy + 5x - 6$. La matrice hessienne de f est :

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix},$$

les valeurs propres sont : $L = \sqrt{5} + 5$ et $l = 5 - \sqrt{5}$. D'après le théorème 5.1, pour $\alpha \in \left] 0, \frac{2}{\sqrt{5} + 5} \right[$ la suite de la méthode du gradient à pas fixe converge linéairement vers $(x^*, y^*)^T = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T$, à taux au plus $\max(|1 - \alpha(\sqrt{5} + 5)|, |1 - \alpha(5 - \sqrt{5})|)$. Les résultats obtenus par la méthode pour $\alpha = 0.1382$ et $(x_0, y_0) = \left(1, \frac{5}{2}\right)$ sont décrits dans la figure 5.2.

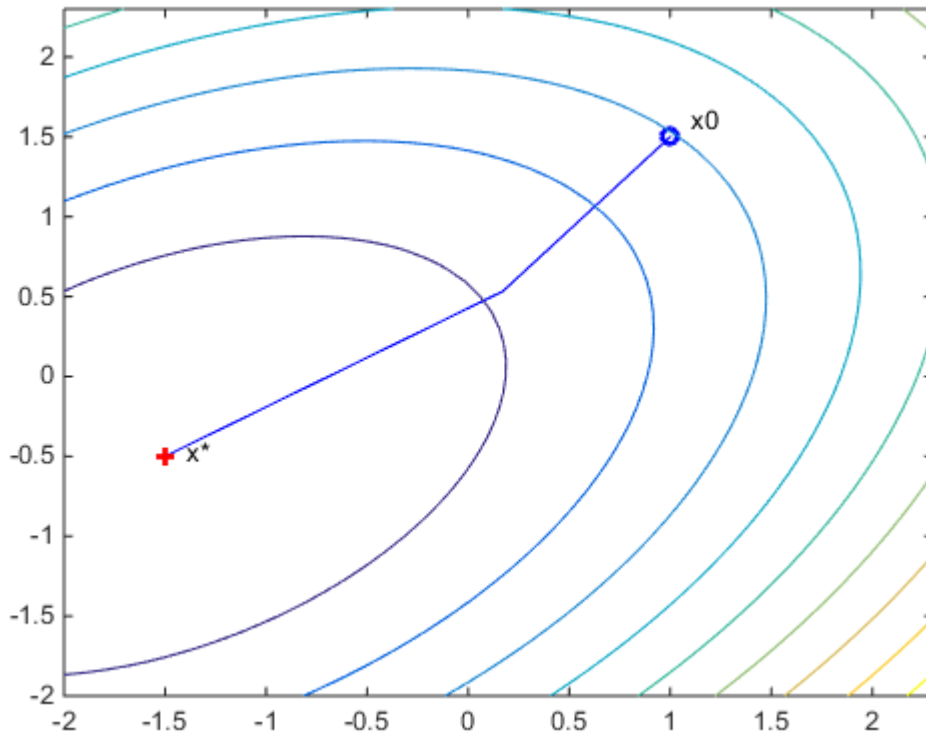


FIGURE 5.2 – Illustration de la méthode du gradient à pas fixe.

Passons maintenant au cas général. On suppose que le gradient de la fonction f soit au minimum lipschitzien. On a le théorème de convergence suivant :

Théorème 5.2 Soient f une fonction continûment différentiable sur \mathbb{R}^n , bornée inférieurement et $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Si $\nabla f(x)$ est L -lipschitzien et $0 < \alpha < \frac{2}{L}$ alors la suite $\{f(x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)}))\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie et de plus la suite $\{\nabla f(x^{(k)})\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro dans \mathbb{R}^n .

Pour démontrer ce résultat on a besoin du lemme suivant :

Lemme 5.1 [8] Soit f une fonction continûment différentiable sur \mathbb{R}^n . Si $\nabla f(x)$ est L -lipschitzien, alors,

$$f(y) \leq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|^2, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Soit $x^{(k)} \in S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x^{(0)})\}$. En appliquant le lemme 5.1 pour $x = x^{(k)}$ et $y = x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)})$, on trouve :

$$f(x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)})) - f(x^{(k)}) \leq -\alpha \left(1 - \frac{\alpha L}{2}\right) \|\nabla f(x^{(k)})\|^2.$$

Pour $\alpha \in]0, \frac{2}{L}[$, on voit que,

$$f(x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)})) - f(x^{(k)}) \leq -\alpha \left(1 - \frac{\alpha L}{2}\right) \|\nabla f(x^{(k)})\|^2 < 0. \quad (5.3)$$

ce qui nous donne que la suite $\{f(x^{(k)})\}_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et comme elle est minorée elle converge donc vers une limite finie. En passant à la limite dans l'inégalité 5.3, on obtient bien que,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(x^{(k)}) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

■

On s'intéresse maintenant au cas où le pas α_k est choisi de façon optimale, au sens où la fonction à optimiser $\phi_k(\alpha) = f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$ diminue le plus possible par rapport à α .

Définition 5.3 Soient f une fonction continûment différentiable sur \mathbb{R}^n et $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Alors la méthode du gradient à pas optimal est définie par la suite :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)}),$$

où $\alpha_k = \arg \min_{\alpha > 0} f(x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)}))$.

Exemple 5.6 Dans cet exemple, on calcule trois itérations de la méthode du gradient à pas optimal. Soit la fonction,

$$f(x, y) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2$$

et le point initial,

$$x^{(0)} = (2, 3)^T.$$

On a bien $\nabla f(x) = (8x_1 - 4x_2, 4x_2 - 4x_1)^T$ et donc $\nabla f(x^{(0)}) = (4, 4)^T$. On note par $\phi_k(\alpha) = f(x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)}))$. Pour $k=0$, on a,

$$\begin{aligned} \phi_0(\alpha) &= f(x^{(0)} - \alpha \nabla f(x^{(0)})) \\ &= f(2 - 4\alpha, 3 - 4\alpha) \\ &= 4(2 - 4\alpha)^2 - 4(2 - 4\alpha)(3 - 4\alpha) + 2(3 - 4\alpha)^2. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \phi'_0(\alpha) &= -\langle \nabla f(x^{(0)} - \alpha \nabla f(x^{(0)})), \nabla f(x^{(0)}) \rangle \\ &= -\left\langle \begin{pmatrix} 4 - 16\alpha \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -32(1 - 2\alpha), \end{aligned}$$

la fonction ϕ_0 a un seul point critique en $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ qui est un minimum global car $\phi_0''(\alpha) = 64 > 0$ et donc,

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x^{(0)} - \alpha_0 \nabla f(x^{(0)}) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En calculant le gradient de f au point $x^{(1)}$, on trouve $\nabla f(x^{(1)}) = (-4, 4)^T \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.
A l'itération 2, on a,

$$\begin{aligned} \phi_1(\alpha) &= f(x^{(1)} - \alpha \nabla f(x^{(1)})) \\ &= f(4\alpha, 1 - 4\alpha) \end{aligned}$$

La dérivée de cette fonction est :

$$\begin{aligned} \phi_1'(\alpha) &= -\langle \nabla f(x^{(1)} - \alpha \nabla f(x^{(1)})), \nabla f(x^{(1)}) \rangle \\ &\quad (8(4\alpha) - 4(1 - 4\alpha), 4(1 - 4\alpha) - 4(4\alpha))^T \\ &= -\left\langle \begin{pmatrix} 48\alpha - 4 \\ 4 - 32\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 32(10\alpha - 1) \end{aligned}$$

et alors la fonction a un seul point critique en $\alpha_1 = \frac{1}{10}$ qui est un minimum global car $\phi_1''(\alpha) = 320 > 0$.

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= x^{(1)} - \alpha_1 \nabla f(x^{(1)}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{10} \\ \frac{6}{10} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De la même façon on trouve,

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

En effet, la fonction f possède un minimum global au point $x^* = (0, 0)^T$. Si on trace la suite $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, on voit que cette méthode suit une trajectoire en zigzag à angles droits vers x^* à (voir la figure 5.3).

Dans la méthode du gradient à pas optimal, les directions successives sont orthogonales comme le montre le résultat suivant :

Proposition 5.2 Si α_k est optimal, alors $\nabla f(x^{(k+1)})$ et $\nabla f(x^{(k)})$ sont orthogonaux.

Preuve. Si α_k est optimal, alors

$$\phi_k'(\alpha_k) = 0,$$

autrement dit,

$$\langle \nabla f(x^{(k)} - \alpha_k \nabla f(x^{(k)})) \nabla f(x^{(k)}) \rangle = 0.$$

■

On peut utiliser un (ou une combinaison) des critères suivants pour arrêter les itérations d'un algorithme de descente :

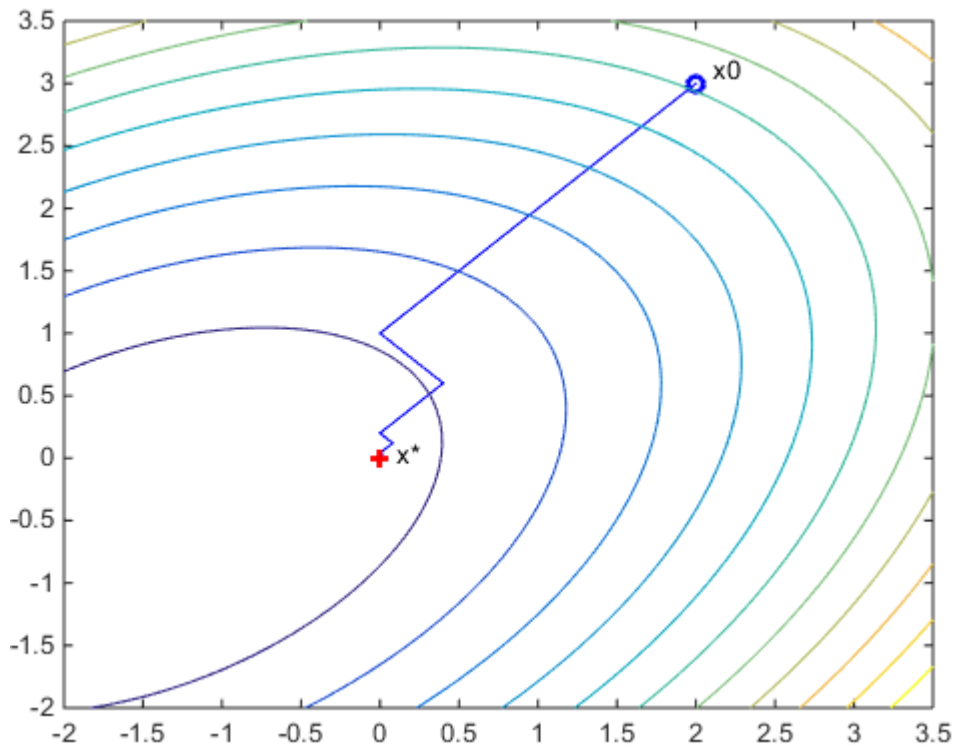


FIGURE 5.3 – Illustration de la méthode du gradient à pas optimal.

1. $\|\nabla f(x^{(k+1)})\| < \varepsilon$
2. $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$
3. $\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k)}\|} < \varepsilon$
4. $|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})| < \varepsilon$
5. $\frac{|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})|}{|f(x^{(k)})|} < \varepsilon$

L'algorithme général pour la méthode du gradient à pas optimal est le suivant :

Algorithm 5.2 *Algorithme pour la méthode du gradient à pas optimal*

Etape I : $k = 0$, ε et $x^{(0)}$

Etape II :

- $d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$
- $\alpha_k = \operatorname{argmin}_{\alpha > 0} f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$.
- Calculer $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$.

Etape III : Si $\|\nabla f(x^{(k+1)})\| < \varepsilon$ stop, $x^ = x^{(k+1)}$ sinon $k = k + 1$, aller à l'étape II.*

3.1 Le cas quadratique

En général, il n'est pas facile de déterminer la valeur exacte du pas optimal, par contre pour une fonctionnelle quadratique définie positive on a le résultat suivant :

Lemme 5.2 *Soit f une fonction quadratique définie positive,*

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + \langle x, b \rangle + c,$$

avec $A^T = A$ est une matrice carrée d'ordre n , définie positive ($A > 0$), $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors, le pas optimal à chaque itération de la méthode du gradient à pas optimal est :

$$\alpha_k = \frac{\langle Ax^{(k)} + b, Ax^{(k)} + b \rangle}{\langle A(Ax^{(k)} + b), Ax^{(k)} + b \rangle} > 0.$$

Preuve. On sait que $\nabla f(x) = Ax + b$. Si α_k est optimal alors, il vérifie la condition nécessaire d'optimalité d'ordre 1 c.à.d,

$$\frac{df(x^{(k)} - \alpha(Ax^{(k)} + b))}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_k} = 0.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} \frac{df(x^{(k)} - \alpha(Ax^{(k)} + b))}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_k} &= -\langle \nabla f(x^{(k)} - \alpha_k(Ax^{(k)} + b)), Ax^{(k)} + b \rangle \\ &= -\langle A(x^{(k)} - \alpha_k(Ax^{(k)} + b)) + b, Ax^{(k)} + b \rangle \\ &= -\langle Ax^{(k)} + b - \alpha_k A(Ax^{(k)} + b), Ax^{(k)} + b \rangle \\ &= -\langle Ax^{(k)} + b, Ax^{(k)} + b \rangle + \alpha_k \langle A(Ax^{(k)} + b), Ax^{(k)} + b \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

alors,

$$\frac{df(x^{(k)} - \alpha(Ax^{(k)} + b))}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_k} = 0.$$

Comme $Ax^{(k)} + b \neq 0$ et $A > 0$, alors $\langle A(Ax^{(k)} + b), Ax^{(k)} + b \rangle \neq 0$ et ,

$$\alpha_k = \frac{\langle Ax^{(k)} + b, Ax^{(k)} + b \rangle}{\langle A(Ax^{(k)} + b), Ax^{(k)} + b \rangle} > 0.$$

■

Exemple 5.7 On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + 3.$$

On a,

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0.$$

Donc, le problème (5.7) admet une unique solution optimale x^* et qui vérifie,

$$\nabla f(x^*) = 0,$$

où

$$x^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

On peut trouver cette solution en appliquant la méthode du gradient à pas optimal, on part de $x^{(0)} = (0, 0)$ avec $\varepsilon = 7e - 3$. On a $\|\nabla f(x^{(0)})\| = 1.118 > \varepsilon$.

Première itération :

$$* \alpha_0 = \frac{\langle Ax^{(0)} + b, Ax^{(0)} + b \rangle}{\langle A(Ax^{(0)} + b), Ax^{(0)} + b \rangle} = \frac{5}{6}. \text{ avec } A = \nabla^2 f(x) \text{ et } b = (1, 0.5)^T$$

$$* x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha_0(Ax^{(0)} + b) = -(0.83, 0.41)^T$$

$$* \|\nabla f(x^{(1)})\| = 0.37 > \varepsilon$$

Deuxième itération :

$$* \alpha_1 = 0.56$$

$$* x^{(2)} = x^{(1)} - \alpha_1(Ax^{(1)} + b) = -(0.93, 0.23)^T$$

$$* \|\nabla f(x^{(2)})\| = 0.08 > \varepsilon$$

Troisième itération :

$$* \alpha_2 = 0.833$$

$$* x^{(3)} = x^{(2)} - \alpha_2(Ax^{(2)} + b) = -(0.983, 0.26)^T$$

$$* \|\nabla f(x^{(3)})\| = 0.02 > \varepsilon$$

Quatrième itération :

$$* \alpha_3 = 0.5$$

$$* x^{(4)} = x^{(3)} - \alpha_3(Ax^{(3)} + b) = -(0.9945, 0.2486)^T$$

$$* \|\nabla f(x^{(4)})\| = 0.006 < \varepsilon. \text{ On arrête et } x^* \approx x^{(4)}.$$

4 Méthode du gradient conjugué

Dans cette section, on présente la méthode du gradient conjugué qui permet de résoudre un problème quadratique dont la matrice hessienne est symétrique définie positive.

Dans la définition suivante, on introduit une des principales propriétés de cette méthode :

Définition 5.4 Soit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symétrique définie positive. Un ensemble de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n : d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(k)}$ avec $k \leq n$ sont A -conjugués ou A -orthogonaux si,

$$(d^{(i)})^T A d^{(j)} = 0, \forall i \neq j.$$

Remarque 5.2 Si $A = I_n$ les vecteurs $\{d^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ sont dits orthogonaux.

Exemple 5.8 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs

$$d^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, d^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } d^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

sont A -conjugués.

Lemme 5.3 Soit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ une matrice symétrique définie positive. Si $d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(k)}$ sont A -conjugués. Alors, $d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(k)}$ sont linéairement indépendants.

Preuve. Soient $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tels que,

$$\sum_{i=0}^k a_i d^{(i)} = 0.$$

Soit $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, alors,

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=0}^k a_i d^{(i)}, Ad^{(j)} \right\rangle &= \sum_{i=0}^k a_i \langle d^{(i)}, Ad^{(j)} \rangle \\ &= a_j \langle d^{(j)}, Ad^{(j)} \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

car

$$\langle d^{(i)}, Ad^{(j)} \rangle = 0, \forall i \neq j.$$

Comme A est définie positive et $d^{(j)} \neq 0$, alors

$$a_j = 0.$$

Il s'ensuit que les vecteurs $d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(k)}$ sont linéairement indépendants. ■

Exemple 5.9 On considère le même exemple 5.8. Soient a_0, a_1 et $a_2 \in \mathbb{R}$ tels que,

$$a_0 d^{(0)} + a_1 d^{(1)} + a_2 d^{(2)} = 0$$

donc,

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 = 0 \\ 3a_1 + 3a_2 = 0, \end{cases}$$

ce qui implique que

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0,$$

alors les vecteurs sont linéairement indépendants.

Définition 5.5 Soit $\{d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(n-1)}\}$ un ensemble de vecteurs non nuls et A -orthogonaux deux à deux. On appelle méthode de directions conjuguées toute méthode définie par la suite récurrente :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}, \end{cases}$$

où,

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \arg \min_{\alpha > 0} f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) \\ &= -\frac{\langle Ax^{(k)} + b, d^{(k)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + x^T b + c, \tag{5.5}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique et définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.

Ce problème admet un unique minimum global qui est caractérisé par :

$$\nabla f(x^*) = Ax^* + b = 0, \quad (5.6)$$

plus la taille de la matrice A est grande, plus la résolution du système 5.6 devient compliqué et coûteuse en temps de calcul. La méthode du gradient conjugué nous permet de résoudre ce problème au plus en n itérations. Mais avant de discuter cette classe de méthodes, il convient d'examiner pourquoi la notion de A -orthogonalité est utile dans la résolution des problèmes quadratiques.

Soient les vecteurs $d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(n-1)}$ A -conjugués. D'après le lemme 5.3, ils sont linéairement indépendants ce qui implique que la solution du problème 5.5 peut s'écrire comme suit,

$$x^* = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i d^{(i)}, \quad (5.7)$$

en multipliant la relation 5.7 par A puis en faisant le produit scalaire avec $d^{(k)}$, on obtient,

$$(d^{(k)})^T Ax^* = (d^{(k)})^T A \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i d^{(i)},$$

on a alors,

$$\alpha_k = \frac{(d^{(k)})^T Ax^*}{(d^{(k)})^T Ad^{(k)}},$$

on sait que,

$$Ax^* = -b.$$

Ainsi, on peut trouver explicitement les scalaires α_k ,

$$\alpha_k = -\frac{(d^{(k)})^T b}{(d^{(k)})^T Ad^{(k)}}.$$

Autrement dit, si on connaît une base A -conjuguée, alors on peut calculer directement la solution optimale x^* avec la formule,

$$x^* = \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{(d^{(i)})^T b}{(d^{(i)})^T Ad^{(i)}} d^{(i)}. \quad (5.8)$$

Dans la suite on note $g^{(k)} = Ax^{(k)} + b$. Dans les méthodes de directions conjuguées données par 5.5, le gradient à l'itération $k+1$ vérifie la propriété suivante :

Lemme 5.4

$$\langle g^{(k+1)}, d^{(i)} \rangle = 0, \forall i = 0, \dots, k \text{ et } k = 0, \dots, n-1. \quad (5.9)$$

Preuve. Montrons par récurrence qu'on a pour tout entier $0 \leq i \leq k$ et $0 \leq k \leq n-1$ la relation 5.9. Comme on a vu précédemment $\langle g^{(1)}, d^{(0)} \rangle = 0$, donc la propriété 5.9 est vraie au rang 1. Supposons maintenant que la propriété 5.9 est vraie au rang k et montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$. On a,

$$\begin{aligned} A(x^{(k+1)} - x^{(k)}) &= Ax^{(k+1)} - b - Ax^{(k)} + b \\ &= g^{(k+1)} - g^{(k)} \\ &= \alpha_k Ad^{(k)}, \end{aligned}$$

alors,

$$g^{(k+1)} = g^{(k)} + \alpha_k A d^{(k)}. \quad (5.10)$$

On en déduit,

$$\begin{aligned} g^{(k+1)T} d^{(i)} &= \left(g^{(k)} + \alpha_k A d^{(k)} \right)^T d^{(i)} \\ &= \left(g^{(k)} \right)^T d^{(i)} + \alpha_k \left(A d^{(k)} \right)^T d^{(i)}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $(g^{(k)})^T d^{(i)} = 0$. De plus, la propriété A-conjuguée donne $\alpha_k (A d^{(k)})^T d^{(i)} = 0$. D'où 5.9. ■

Le lemme 5.4 montre que le vecteur $g^{(k+1)}$ est orthogonal à tout vecteur de l'espace engendré par $d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(k)}$ comme il est illustré dans la figure 5.4.

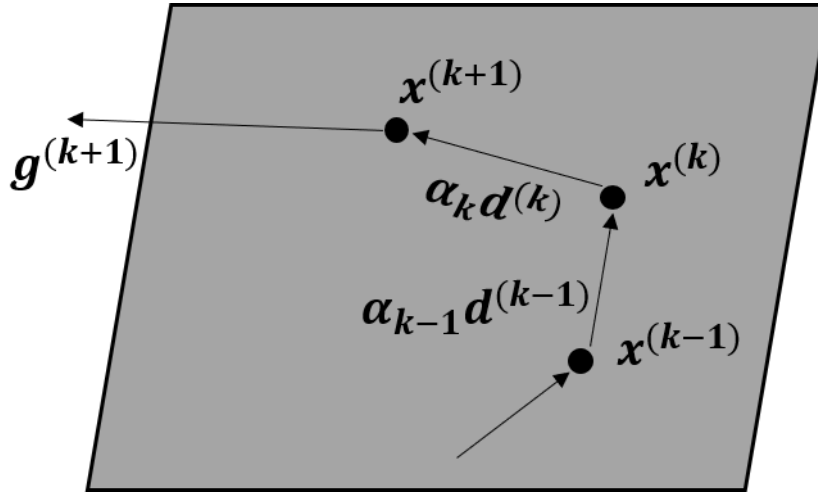


FIGURE 5.4 – Illustration géométrique du lemme 5.4.

On note par $E_k = \text{vect} \{d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(k-1)}\}$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(k-1)}$ et $x^{(0)} + E_k = \{x^{(0)} + x : x \in E_k\}$. Le lemme suivant est un résultat fondamental des méthodes de directions conjuguées :

Lemme 5.5 Soit $\{d^{(i)}\}_{i=0, \dots, k-1}$ un ensemble de vecteurs non nuls et A-orthogonaux deux à deux. Alors pour tout $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $x^{(k)}$ minimise f sur le sous-espace affine $x^{(0)} + E_k$.

Preuve. On considère la matrice,

$$D^{(k)} = \begin{bmatrix} d^{(0)} & d^{(1)} & \dots & d^{(k-1)} \end{bmatrix},$$

et le vecteur,

$$y = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}]^T.$$

D'une part, on a,

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= x^{(0)} + \alpha_0 d^{(0)} + \dots + \alpha_{k-1} d^{(k-1)} \\ &= x^{(0)} + D y. \end{aligned}$$

D'autre part, on a,

$$\begin{aligned}\langle Dy, ADy \rangle &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \langle d^{(i)}, Ad^{(j)} \rangle \alpha_i \alpha_j \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \langle d^{(i)}, Ad^{(i)} \rangle (\alpha_i)^2.\end{aligned}$$

Soit $x \in x^{(0)} + E_k$. En faisant un développement de Taylor de la fonction f au voisinage de x_0 (ce développement est exact car f est quadratique), on trouve,

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x^{(0)}) + \langle \nabla f(x^{(0)}), (x - x^{(0)}) \rangle + \frac{1}{2} \langle (x - x^{(0)}), \nabla^2 f(x^{(0)}) (x - x^{(0)}) \rangle \\ &= f(x^{(0)}) + \langle Ax^{(0)} + b, Dy \rangle + \frac{1}{2} \langle Dy, ADy \rangle \\ &= f(x^{(0)}) + \sum_{i=0}^k \frac{1}{2} \left(\langle d^{(i)}, Ad^{(i)} \rangle (\alpha_i)^2 + \langle Ax^{(0)} + b, d^{(i)} \rangle \alpha_i \right).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que la fonction f est séparable par rapport aux variables $\{\alpha_i\}_{i=0,\dots,k}$. Dans ce cas, le minimum de f par rapport à y peut être calculé indépendamment pour chaque α_i . La valeur optimale de α_i est égale à la valeur donnée en 5.4. Par conséquent, chaque direction $d^{(i)}$ n'a besoin d'être utilisée qu'une seule fois, et chaque $x^{(k)}$ est le minimum de f sur $x^{(0)} + E_k$. ■

La méthode du gradient conjugué est une méthode de directions conjuguées qui consiste à construire une suite de vecteurs $\{d^{(i)}\}_{i=0,\dots,k}$ de tel sorte qu'ils soient A-conjugués en prenant comme première direction de descente la direction $d^{(0)} = -g^{(0)}$. Dans cette méthode, les directions ne sont pas prédéfinies, mais elles se calculent au fur et à mesure de la progression de l'algorithme. A chaque itération, la direction est obtenue comme une combinaison linéaire de la direction précédente et du gradient de f au point actuel. L'avantage principal de cette méthode est que la solution optimale peut se localiser en effectuant au plus n itérations. Si on fixe $d^{(0)} = -g^{(0)}$, l'algorithme de la méthode du gradient conjugué prend la forme suivante : En partant de n'importe quel point initial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)},$$

avec

$$\alpha_k = -\frac{\langle g^{(k)}, d^{(k)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle},$$

et

$$d^{(k+1)} = -g^{(k+1)} + \beta_k d^{(k)},$$

où

$$\beta_k = -\frac{\langle g^{(k+1)}, d^{(k)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle}.$$

Le théorème suivant montre que les directions $d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(n-1)}$ sont effectivement A-conjuguées.

Théorème 5.3 Dans la méthode du gradient conjugué, les directions $d^{(0)}, d^{(1)}, \dots, d^{(n-1)}$ sont A-conjuguées, autrement dit,

$$\langle d^{(k)}, Ad^{(i)} \rangle = 0, i = 0, \dots, k-1.$$

Preuve. Soit $k = 0, \dots, n - 1$. On démontre par récurrence : on a,

$$\langle d^{(1)}, Ad^{(0)} \rangle = 0.$$

On suppose que pour tout entier k ,

$$\langle d^{(k)}, Ad^{(i)} \rangle = 0, i = 0, \dots, k - 1$$

et on montre que,

$$\langle d^{(k+1)}, Ad^{(i)} \rangle = 0, i = 0, \dots, k.$$

Soit $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. On a,

$$d^{(i)} = -g^{(i)} + \beta_{i-1} d^{(i-1)},$$

donc

$$\left(g^{(k+1)}\right)^T d^{(j)} = -\left(g^{(k+1)}\right)^T g^{(i)} + \beta_{i-1} \left(g^{(k+1)}\right)^T d^{(i-1)},$$

ce qui implique,

$$\left(g^{(k+1)}\right)^T g^{(i)} = 0,$$

Maintenant, on montre que $\langle d^{(k+1)}, Ad^{(i)} \rangle = 0$. Pour $i = k$, l'égalité est triviale. Si $i < k$, on a,

$$\begin{aligned} \langle d^{(k+1)}, Ad^{(i)} \rangle &= -\langle g^{(k+1)}, Ad^{(i)} \rangle + \langle \beta_k d^{(k)}, Ad^{(i)} \rangle \\ &= -\langle g^{(k+1)}, Ad^{(i)} \rangle \\ &= -\left\langle g^{(k+1)}, \frac{\alpha_j}{\alpha_j} Ad^{(i)} \right\rangle. \end{aligned}$$

En utilisant la relation 5.10, on trouve,

$$\begin{aligned} \langle d^{(k+1)}, Ad^{(i)} \rangle &= -\left\langle g^{(k+1)}, \frac{1}{\alpha_i} \alpha_i Ad^{(i)} \right\rangle \\ &= -\left\langle g^{(k+1)}, \frac{1}{\alpha_j} \left(g^{(i+1)} - g^{(i)}\right) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\alpha_i} \left\langle g^{(k+1)}, \left(g^{(i+1)} - g^{(i)}\right) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\alpha_i} \left\langle g^{(k+1)}, \left(g^{(i+1)} - g^{(i)}\right) \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Exemple 5.10 On considère l'exemple suivant,

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + x^T b,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } b = -\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La fonction f admet un minimum global au point $x^* = (0, 0, 0)^T$. Les résultats obtenus par la méthode du gradient conjugué sont représentés dans le tableau 5.1. De ce tableau, on remarque que la méthode du gradient conjugué converge en trois itérations vers la solution optimale alors que la méthode du gradient à pas optimal nécessite un temps de calcul plus long environ de 16 itérations pour atteindre le minimum avec une erreur d'ordre 4.

| La méthode du gradient conjugué | | | La méthode du gradient à pas optimal | | |
|---------------------------------|-------------------------------|---------------|--------------------------------------|---------------|--|
| k | $x^{(k)}$ | $\ g^{(k)}\ $ | $x^{(k)}$ | $\ g^{(k)}\ $ | |
| 0 | $(0, 0, 0)^T$ | 3.1623 | $(0, 0, 0)^T$ | 3.1623 | |
| 1 | $(0.8333, 0, 0.2778)^T$ | 0.8958 | $(0.8333, 0, 0.2778)^T$ | 0.8958 | |
| 2 | $(0.9346, -0.1215, 0.1495)^T$ | 0.2383 | $(0.8790, -0.1143, 0.1406)^T$ | 0.2925 | |
| 3 | $(1.0000, 0, 0)^T$ | 0 | $(0.9720, -0.0407, 0.1103)^T$ | 0.2306 | |
| 4 | | | $(0.9658, -0.0543, 0.0582)^T$ | 0.1147 | |
| 5 | | | $(0.9830, -0.0153, 0.0459)^T$ | 0.0953 | |
| 6 | | | $(0.9842, -0.0226, 0.0245)^T$ | 0.0488 | |
| 7 | | | $(0.9930, -0.0067, 0.0197)^T$ | 0.0407 | |
| 8 | | | $(0.9933, -0.0097, 0.0105)^T$ | 0.0208 | |
| 9 | | | $(0.9970, -0.0028, 0.0084)^T$ | 0.0174 | |
| 10 | | | $(0.9971, -0.0041, 0.0045)^T$ | 0.0089 | |
| 11 | | | $(0.9987, -0.0012, 0.0036)^T$ | 0.0074 | |
| 12 | | | $(0.9988, -0.0018, 0.0019)^T$ | 0.0038 | |
| 13 | | | $(0.9995, -0.0005, 0.0015)^T$ | 0.0032 | |
| 14 | | | $(0.9995, -0.0008, 0.0008)^T$ | 0.0016 | |
| 15 | | | $(0.9998, -0.0002, 0.0007)^T$ | 0.0014 | |
| 16 | | | $(0.9998, -0.0003, 0.0003)^T$ | 0.0007 | |

TABLEAU 5.1 – Tableau comparatif.

Exemple 5.11 Soit la fonction $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_2 - x_1$ et $x^{(0)} = (1, 1)^T$. La solution optimale du problème d'optimisation $\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$ est $x^* = (\frac{1}{7}, -\frac{3}{7})$. Une étude comparative des deux méthodes celle du gradient conjugué et l'autre du gradient à pas optimal est représentée dans le tableau 5.2 et la figure 5.5.

| La méthode du gradient conjugué | | | La méthode du gradient à pas optimal | | |
|---------------------------------|-----------------------|---------------|--------------------------------------|---------------|--|
| k | $x^{(k)}$ | $\ g^{(k)}\ $ | $x^{(k)}$ | $\ g^{(k)}\ $ | |
| 0 | $(1, 1)^T$ | 2.8284 | $(1, 1)^T$ | 2.8284 | |
| 1 | $(0, 0)^T$ | 1.4142 | $(0, 0)^T$ | 1.4142 | |
| 2 | $(0.1429, -0.4286)^T$ | 0 | $(0.2500, -0.2500)^T$ | 0.3536 | |
| 3 | | | $(0.1250, -0.3750)^T$ | 0.1768 | |
| 4 | | | $(0.1563, -0.4063)^T$ | 0.0442 | |
| 5 | | | $(0.1406, -0.4219)^T$ | 0.0221 | |
| 6 | | | $(0.1445, -0.4258)^T$ | 0.0055 | |
| 7 | | | $(0.1426, -0.4277)^T$ | 0.0028 | |
| 8 | | | $(0.1431, -0.4282)^T$ | 0.0007 | |

TABLEAU 5.2 – Tableau comparatif.

Remarque 5.3 On s'est limité au cas quadratique, pour le cas non quadratique la généralisation existe déjà.

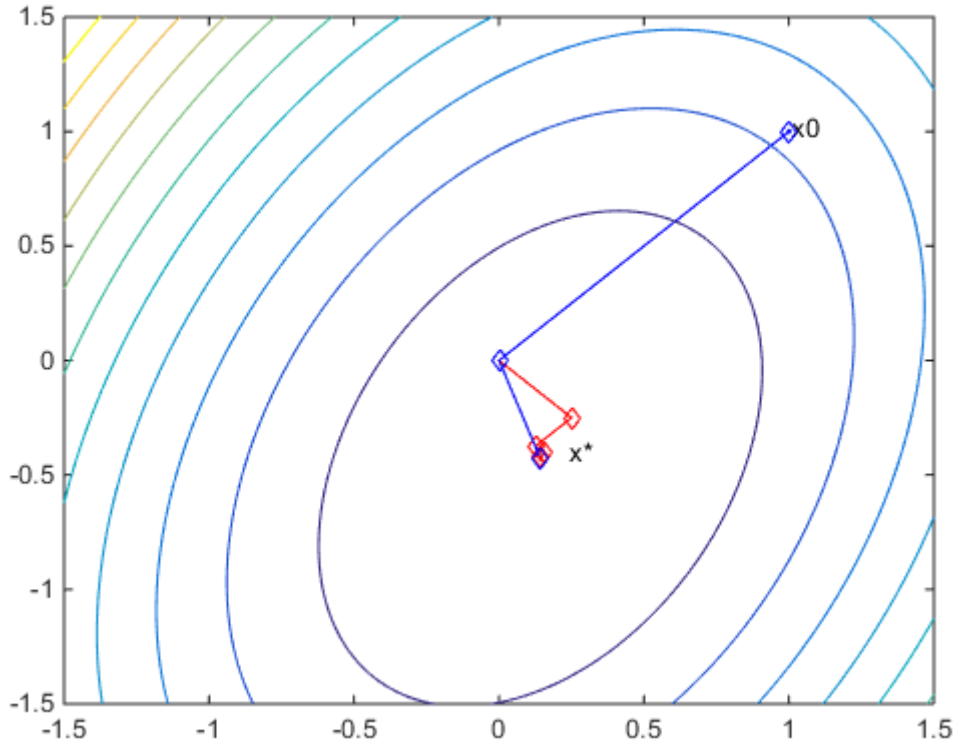


FIGURE 5.5 – Comparaison entre la méthode du gradient conjugué (en bleu) et la méthode du gradient à pas optimal (en rouge).

5 Exercices

Exercice 5.1 Soit la fonction $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$, On veut minimiser la fonction f sur \mathbb{R}^2 en utilisant la méthode de descente, dont l'itéré principal est $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$.

1. Soit le point initial $x^{(0)} = (2, 2)^\top$, est-on à l'optimum ?
2. Soient $d^{(0)} = (1, 1)^\top$ et $d^{(1)} = (-1, -1)^\top$ deux directions, laquelle est de descente au point x_0 ?
3. Après avoir utiliser la bonne direction, on a obtenu le point $x_1 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})^\top$. Le pas utilisé, est-il un pas optimal ?

Exercice 5.2 On considère l'algorithme du gradient à pas fixe appliqué à la minimisation des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ données en a) et b). Dans chaque cas, trouver le plus grand intervalle du pas choisit α pour laquelle l'algorithme converge.

- a) $f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 + 1$
- b) $f(x) = x^\top \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x + x^\top \begin{pmatrix} 16 \\ 23 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.3 Utiliser la méthode du gradient conjugué pour résoudre le problème d'optimisation suivant,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = \frac{1}{2} x^\top A x + x^\top b,$$

avec :

1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 7 & 6 \\ 8 & 12 & 8 & 7 \\ 7 & 8 & 12 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 12 \end{pmatrix} \text{ et } b_1 = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } b_3 = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.

$$A_4 = I_4 \text{ et } b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6 Solutions des exercices

Solution 5.1 Soit la fonction $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$. On a,

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}.$$

1. Soit le point initial $x^{(0)} = (2, 2)^\top$ n'est pas optimal, car $\nabla f(x^{(0)}) = (4, 16)^\top \neq 0_{\mathbb{R}^2}$.

2. On a,

$$\langle d^{(0)}, \nabla f(x^{(0)}) \rangle = 40 > 0,$$

donc $d^{(0)}$ n'est pas une direction de descente.

On a,

$$\langle d^{(1)}, \nabla f(x^{(0)}) \rangle = -40 < 0,$$

alors $d^{(1)}$ est une direction de descente.

3. Après avoir utiliser la bonne direction, on a obtenu le point $x_1 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})^\top$. Le pas utilisé, n'est pas optimal, car,

$$\begin{aligned} \langle d^{(1)}, \nabla f(x^{(1)}) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -18 \neq 0. \end{aligned}$$

Solution 5.2 a)

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice hessienne de f est définie positive car ses valeurs propres sont : $\lambda_1 = 10$ et $\lambda_2 = 2 > 0$. D'après le théorème 5.1, pour $\alpha \in]0, \frac{2}{10}[$ l'algorithme converge.

- b)** De même pour cette fonction, on a $a \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et de plus $\lambda_1 = \sqrt{3} + 3$ et $\lambda_2 = 3 - \sqrt{3} > 0$.
Donc pour $\alpha \in \left] 0, \frac{2}{\sqrt{3}+3} \right[$ l'algorithme converge.

Chapitre 6

Méthode de Newton

Dans ce chapitre, on introduit une méthode du second ordre très connue et plus largement utilisée c'est la méthode de Newton. Cette méthode est l'une des principales classes de méthode d'optimisation sans contraintes. On considère le problème de minimisation

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad (6.1)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 .

A chaque itération de la méthode de Newton, on approxime f par une forme quadratique en fonction des deux premiers termes du développement de Taylor :

$$f(x) \approx q_k(x) = f(x^{(k)}) + (x - x^{(k)})^T \nabla f(x^{(k)}) + \frac{1}{2} (x - x^{(k)})^T H(x^{(k)}) (x - x^{(k)}), \quad (6.2)$$

avec $H(x^{(k)}) = \nabla^2 f(x^{(k)})$. Une condition nécessaire pour un minimum de la fonction quadratique q_k est $\nabla q_k(x) = 0$ ce qui implique,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - H(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)}).$$

Cette solution existe si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (a) Le hessien est nonsingulier.
- (b) L'approximation dans l'équation 6.2 est valide au voisinage du point $x^{(k)}$.

L'algorithme général pour la méthode du Newton est le suivant :

Algorithm 6.1 *Algorithme pour la méthode du Newton*
Etape I : $k = 0, \epsilon$ et $x^{(0)}$
Etape II : $x^{(k+1)} = x^{(k)} - H(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)})$.
Etape III : Si $\|\nabla f(x^{(k+1)})\| < \epsilon$ stop, $x^* = x^{(k+1)}$ sinon $k = k + 1$, aller à l'étape 2.

Exemple 6.1 Soit la fonction suivante

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2)^2 x_2^2 + (x_1 + 1)^2 \\ \nabla f(x) &= \begin{pmatrix} 4(x_1 - 2)^3 + 2(x_1 - 2)x_2^2 + 2(x_1 + 1) \\ 2(x_1 - 2)^2 x_2 \end{pmatrix} \\ \nabla^2 f(x) &= \begin{pmatrix} 12(x_1 - 2)^2 + 2x_2^2 + 2 & 4(x_1 - 2)x_2 \\ 4(x_1 - 2)x_2 & 2(x_1 - 2)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$x^{(0)} = (1, 1)^t, \quad x^* = (2, -1)^t$$

La valeur optimale du problème est $f(2, -1) = 0$.

En appliquant la méthode de Newton, on trouve :

– $k=0$

$$\begin{aligned}x^1 &= x^0 - (\nabla^2 f(x^0))^{-1} \nabla f(x^0) \\&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

et

$$f(x^0) = 6.$$

– $k=1$

$$\begin{aligned}x^1 &= x^0 - (\nabla^2 f(x^0))^{-1} \nabla f(x^0) \\&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

et

$$f(x^1) = 1.5.$$

– $k=2$

$$\begin{aligned}x^2 &= x^1 - (\nabla^2 f(x^1))^{-1} \nabla f(x^1) \\&= \begin{pmatrix} 1,39 \\ -0,696 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

et

$$f(x^2) = 4,09e - 1.$$

– $k=3$

$$\begin{aligned}x^3 &= x^2 - (\nabla^2 f(x^2))^{-1} \nabla f(x^2) \\&= \begin{pmatrix} 1,746 \\ -0,949 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

et

$$f(x^3) = 6.49e - 2.$$

Pour le cas de fonctions quadratiques définies positives, on a le résultat suivant :

Théorème 6.1 *Si f est une forme quadratique définie positive, alors la méthode de Newton converge vers la solution optimale en une seule itération $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.*

Preuve. Soit $f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + x^T b + c$, avec $H = H^T$, $H > 0$. On a

$$\nabla f(x) = Hx + b \text{ et } \nabla^2 f(x) = H.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}x^{(1)} &= x^{(0)} - H(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(0)}) \\&= x^{(0)} - H^{-1}(Hx^{(0)} + b) \\&= -H^{-1}b.\end{aligned}$$

■

Comme on a vu précédemment, pour le cas d'une fonction quadratique définie positive, la méthode de Newton atteint le minimum en une seule itération. Cependant, pour le cas général où la fonction à minimiser est non quadratique, rien ne garantit que la méthode de Newton converge. L'un des avantages de cette méthode est que si le point de départ est proche de la solution optimale x^* , alors la méthode convergera rapidement. Le théorème suivant montre la convergence locale et donne le taux de convergence de la méthode de Newton.

Théorème 6.2 [6] Soient $f \in C^3$, $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x^*) = 0$ et $H(x^*)$ est inversible. Alors, $\forall x^{(0)}$ suffisamment proche de x^* , la méthode de Newton converge vers x^* avec un ordre $p \geq 2$.

Exemple 6.2

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2. \quad (6.3)$$

Il est facile de remarquer que la solution optimale du problème (6.3) est bien $x^* = (2, 1)^T$. Les résultats sont représentés dans les tableaux suivant avec une tolérance $\varepsilon = 1e-4$. Dans le premier tableau, on part d'un point initial proche du solution et dans le deuxième tableau, on part d'un point un peu loin de la solution.

| k | $x^{(k)}$ | $\ \nabla f(x^{(k)})\ $ |
|-----|-----------------------|-------------------------|
| 0 | $(1, 0)^T$ | 4.4721 |
| 1 | $(1.33333, 0.6667)^T$ | 1.1852 |
| 2 | $(1.5556, 0.7778)^T$ | 0.3512 |
| 3 | $(1.7037, 0.8519)^T$ | 0.1040 |
| 4 | $(1.8025, 0.9012)^T$ | 0.0308 |
| 5 | $(1.8683, 0.9342)^T$ | 0.0091 |
| 6 | $(1.9122, 0.9561)^T$ | 0.0027 |
| 7 | $(1.9415, 0.9707)^T$ | 0.0008 |

| k | $x^{(k)}$ | $\ \nabla f(x^{(k)})\ $ |
|-----|------------------------|-------------------------|
| 0 | $(-10, 60)^T$ | 7190.82637810148 |
| 1 | $(-6, -3)^T$ | 2048606.814814814815 |
| 2 | $(-3.3333, -1.6667)^T$ | 179.796982167353 |
| 3 | $(-1.5556, -0.7778)^T$ | 53.2731799014378 |
| 4 | $(-0.3704, -0.1852)^T$ | 15.7846458967223 |
| 5 | $(0.4198, 0.2099)^T$ | 4.67693211754735 |
| 6 | $(0.9465, 0.4733)^T$ | 1.38575766445847 |
| 7 | $(1.2977, 0.6488)^T$ | 0.410594863543252 |
| 8 | $(1.5318, 0.7659)^T$ | 0.121657737346149 |
| 9 | $(1.6879, 0.8439)^T$ | 0.0360467369914514 |
| 10 | $(1.7919, 0.8960)^T$ | 0.0106805146641337 |
| 11 | $(1.8613, 0.9306)^T$ | 0.0031645969375211 |
| 12 | $(1.9075, 0.9538)^T$ | 0.000937658351858103 |

Si la matrice hessienne est définie positive en chaque point $x^{(k)}$, alors la méthode de Newton est une méthode de descente.

Théorème 6.3 Soit $(x^{(k)})$ la suite de la méthode de Newton pour le problème $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. Si $\forall k \in \mathbb{N}, H(x^{(k)}) > 0$ et $\nabla f(x^{(k)}) \neq 0$, alors $d^{(k)} = -H(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)}) = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ est une direction de descente en $x^{(k)}$.

Preuve. On a,

$$H(x^{(k)}) > 0,$$

alors,

$$\left(H(x^{(k)})\right)^{-1} > 0.$$

On a,

$$\langle d^{(k)}, \nabla f(x^{(k)}) \rangle = - \langle \left(H(x^{(k)})\right)^{-1} \nabla f(x^{(k)}), \nabla f(x^{(k)}) \rangle < 0.$$

■

Exemple 6.3 Soit la fonction f telle que,

$$f(x) = 2x_1^3 + 3x_1^2 + 12x_1x_2 + 3x_2^2 - 6x_2 + 6.$$

On a,

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1^2 + 6x_1 + 12x_2 \\ 12x_1 + 6x_2 - 6 \end{pmatrix},$$

et

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1 + 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la méthode de Newton, on obtient,

| k | x^k | $\nabla f(x^k)$ | $\nabla^2 f(x^k)$ | $\nabla^2 f(x^k)^{-1}$ | $\ \nabla f(x^k)\ $ |
|-----|---|---|---|--|---------------------|
| 0 | $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -36 \\ -18 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,1667 & -0,1667 \\ -0,1667 & 0,25 \end{pmatrix}$ | 40,2492 |
| 1 | $\begin{pmatrix} 4 \\ -5,5 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 54 \\ 9 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 54 & 12 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,0238 & -0,0238 \\ -0,0238 & 0,1071 \end{pmatrix}$ | 54,7449 |
| 2 | $\begin{pmatrix} 2,9286 \\ -5,1786 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 6,8878 \\ -1,9286 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 41,1429 & 12 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,0343 & -0,0343 \\ -0,0343 & 0,1175 \end{pmatrix}$ | 7,1527 |
| 3 | $\begin{pmatrix} 2,2661 \\ -4,7153 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,5491 \\ -2,7794 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 37,5126 & 12 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,0392 & -0,0392 \\ -0,0392 & 0,1125 \end{pmatrix}$ | 2,8331 |
| 4 | $\begin{pmatrix} 2,4956 \\ -4,3533 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,1021 \\ -2,1725 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 35,947 & 12 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0,0418 & -0,0418 \\ -0,0418 & 0,1251 \end{pmatrix}$ | 2,1749 |

Parmi les avantages de la méthode on cite :

1. Si on part d'un point initial $x^{(0)}$ proche de la solution x^* , alors la méthode de Newton converge quadratiquement vers x^* comme il est indiqué dans le théorème 6.2. Dans ce cas, on dit qu'on a une convergence locale.
2. Si le problème d'optimisation est quadratique alors la méthode de Newton converge en une seule itération.

Les inconvénients de la méthode de Newton sont les suivants :

1. Pour plusieurs problèmes la convergence n'est pas assurée, en particulier, il faut choisir $x^{(0)}$ proche de la solution et donc on n'a pas une convergence globale.
2. Le coût de chaque itération est important : il faut évaluer N dérivées premières et N^2 dérivées secondes.

3. Pour chaque itération, il faut résoudre un système linéaire i.e.

$$H(x^k) d^k = -\nabla f(x^k).$$

Pour éviter les problèmes cités précédemment, les spécialistes suggèrent :

1. Afin d'assurer la convergence globale de l'algorithme, on peut le modifier en remplaçant les itérations par :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k H(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)}),$$

où $\alpha_k = \operatorname{argmin}_{\alpha > 0} f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$.

2. On peut utiliser des méthodes dites de quasi-Newton qui consistent à remplacer l'inverse de la hessienne $H(x^{(k)})$ par une suite de matrices symétriques définies positives $\{H_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

1 Exercices

Exercice 6.1 1. Montrer que la convergence vers 0 des itérées de la méthode de Newton à pas fixe pour la minimisation de $f(x) = x^4$ est linéaire dès que $x^{(0)} = 0$.

2. Pour résoudre une équation $g(x) = 0$, analyser la vitesse de convergence de l'algorithme de Newton pour la famille de fonctions $g(x) = x^p + x^{p+1}$ proche de $x^{(0)} = 0$, une racine de $g(x)$; distinguer les cas $p = 1$ et $p \leq 2$.

Exercice 6.2 Vérifier que la méthode de Newton appliquée au calcul de l'inverse d'un scalaire α donne la méthode itérative suivante : $x^{(0)}$ est donné et on calcule $x^{(k+1)} = x^{(k)} (\alpha - x^{(k)})$, pour $k \geq 0$.

Exercice 6.3 Utiliser la méthode de Newton pour minimiser la fonction de Powell,

$$f(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4,$$

prenant $x^{(0)} = (3, -1, 0, 1)^T$.

Exercice 6.4 On veut minimiser la fonction suivante :

$$f(x) = 9x - 4 \ln(x - 7);$$

sur le domaine $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 7\}$ en utilisant la méthode de Newton.

- déterminer analytiquement le minimum de f sur X .
- Donner la formule exacte de la suite de Newton.
- Calculer les cinq premières itérations de Newton en partant du point initial $x^{(0)} = 7.61$.

Annexe

2 Signe d'une matrice symétrique

On considère la fonction quadratique q définie par la relation

$$q(x) = \frac{1}{2}x^T H x + x^T b + \alpha, \quad (6.4)$$

avec H est une matrice symétrique. On sait que la matrice hessienne de q est H . Ainsi, du théorème de la caractérisation de la convexité par la matrice hessienne 2.3, on déduit que q est convexe (resp. strictement convexe) si et seulement si la matrice hessienne H est semi-définie positive (resp. définie positive). Le théorème suivant, un classique de l'algèbre linéaire nous donne une caractérisation pratique.

Théorème 6.4 Une matrice $H \in S_n(\mathbb{R})$ ($S_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées symétriques de taille n), est définie positive (resp. semi-définie positive) si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives (resp. positives).

Corollaire 6.1 Une forme quadratique q définie par la relation (6.4), est convexe (resp. strictement convexe) si et seulement si les valeurs propres de la matrice hessienne H sont positives (resp. strictement positives).

Exemple 6.4 la matrice

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de H sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 5$. Alors, cette matrice est semi-définie positive

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{7} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de H sont $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 10$ et $\lambda_3 = \sqrt{7}$. Dans ce cas, le signe de la matrice est non-définie.

Un autre exemple, où H est donnée par

$$H = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Dans cet exemple la matrice est définie négative car $\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{7}{2} < 0, \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{7}{2} < 0$.

La convexité d'une forme quadratique nécessite le calcul de toutes ces valeurs propres, ceci peut s'avérer couteux point de vu numérique. Le dernier résultat de ce chapitre connu sous le nom du critère de Sylvester, donne une caractérisation moins couteuse numériquement. Donnons d'abord quelques définitions.

Définition 6.1 Soit $H = (h_{ij})_{i,j} \in S_n(\mathbb{R})$, Une sous-matrice $k \times k$ formée, à partir de H , en éliminant $n - k$ colonnes, disons les colonnes i_1, i_2, \dots, i_{n-k} et les mêmes $n - k$ lignes i_1, i_2, \dots, i_{n-k} , est appelée une sous-matrice de H , d'ordre principal k . Le déterminant d'une sous-matrice principale $k \times k$ est appelé le mineur principal d'ordre k de la matrice H .

Exemple 6.5 Soit H une matrice 3×3

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}.$$

Les mineurs principaux du premier ordre sont tous les termes qui sont sur la diagonale. Pour une matrice 3×3 , on a donc 3 mineurs principaux du premier ordre : h_{11} , h_{22} et h_{33} . Les mineurs principaux du second ordre sont les déterminants de toutes les sous-matrices 2×2 obtenues en éliminant la même ligne et colonne. On a trois mineurs principaux de second ordre

$$\det \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} h_{11} & h_{13} \\ h_{31} & h_{33} \end{bmatrix} \text{ et } \det \begin{bmatrix} h_{22} & h_{23} \\ h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}.$$

Un seul mineur principal de troisième ordre ; qui est le déterminant de la matrice H .

On considère la matrice suivante

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}$$

Un des mineurs principaux d'ordre 1 est obtenu en éliminant les deux lignes et les deux colonnes d'indices $\{2, 3\}$

$$\Delta_{1,1} = 1$$

De la même manière, on obtient les deux autres mineurs principaux d'ordre 1 en éliminant

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}$$

les deux lignes et les deux colonnes d'indices $\{1, 3\}$, ensuite en éliminant les deux lignes et les deux colonnes d'indices $\{1, 2\}$

$$\Delta_{1,2} = 1 \text{ et } \Delta_{1,3} = 4.$$

Pour cet exemple, les mineurs principaux d'ordre 2 sont obtenus en éliminant la ligne et la colonne de même indice. On a

$$\Delta_{2,1} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1, \Delta_{2,2} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 3 \text{ et } \Delta_{2,3} = \det \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix} = 4.$$

Il y a un seul mineur principal d'ordre 3 et il est le déterminant de la matrice H i.e.

$$\Delta_3 = \det(H).$$

Définition 6.2 Soit $H = (h_{ij})_{i,j} \in S_n(\mathbb{R})$, Une sous-matrice $k \times k$ formée, à partir de H, en éliminant les $n - k$ dernières colonnes et les memes $n - k$ dernières lignes, est appelée une sous-matrice de H, d'ordre principal dominant k. Le déterminant d'une sous-matrice principale dominante $k \times k$ est appelé le mineur principal dominant d'ordre k de la matrice H.

Exemple 6.6 Soit H une matrice 3×3

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}.$$

Les mineurs principaux dominants du premier ordre est seulement h_{11} , obtenu en éliminant les 2 dernières lignes et colonnes. Pour les mineurs principaux dominants du second ordre, on a seulement

$$\det \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

où la sous-matrice est obtenue en éliminant la troisième ligne et colonne. Le mineurs principal dominant du troisième ordre est le déterminant de la matrice H.

Théorème 6.5 1. Une matrice $H \in S_n(\mathbb{R})$, est semi-définie positive si et seulement si chacun des mineurs principaux de H est ≥ 0 .

2. Une matrice $H \in S_n(\mathbb{R})$, est semi-définie négative si et seulement si chacun des mineurs principaux d'ordre impaire de H est ≤ 0 , et chacun des mineurs principaux d'ordre paire de H est ≥ 0 .

3. Une matrice $H \in S_n(\mathbb{R})$, est définie positive si et seulement si chacun des mineurs principaux dominants de H est > 0 .

4. Une matrice $H \in S_n(\mathbb{R})$, est définie négative si et seulement si ses n mineurs principaux dominant alternent en signe de la manière suivante :

$$h_{11} < 0, \det \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} > 0, \det \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} < 0 \text{ ect....}$$

Exemple 6.7 la matrice

$$H = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

n'est pas semidéfinie positive, est-elle définie négative ? Il se trouve que $h_{11} < 0$ et $\det \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} > 0$, d'où H est définie négative.

Bibliographie

- [1] **Andreas. A. and Lu. W-S. L.** (2007) , *Practical Optimization : Algorithms and Engineering Applications*, Springer, New York.
- [2] **Avez. A** (1983), *Calcul différentiel*, Masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo.
- [3] **Berkovitz L.D.** (2002), *Convexity and optimization in \mathbb{R}^n* , Published by John Wiley & Sons, Inc. [23](#)
- [4] **Biegler. L.T.** (2010), *Nonlinear Programming : Concepts, Algorithms and Applications to Chemical Processes*, SIAM, Philadelphia.
- [5] **Bierlaire. M.** (2006), *Introduction à l'optimisation différentiable*, première édition, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. [2](#), [4](#)
- [6] **Edwin K. P. Chong, Stanislaw H. Zak** (2013), *An Introduction to Optimization*, 4th Edition, Published by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. [14](#), [30](#), [64](#)
- [7] **Griva. I., Nash S.G. and Sofer. A.** (2009), *Linear and nonliner optimization*, second edition : society for industrial and applied mathematics. Philadelphia.
- [8] **Luenberger. D. G. and Ye. Y.** (2008), *Linear and Nonlinear Programming*, 4th Edition, Published by Springer. [30](#), [48](#)
- [9] **Sundaram. R. K.** (1996), *A First Course in Optimization Theory*, Combridge University Press, New York University. [30](#)
- [10] **Sun. W. and Yuan. Y-X.** (2006), *Optimization Theory and Methods Nonlinear Programming*, Springer-Verlag.
- [11] **Yang. X.S.** (2018), *Optimization techniques and applications with examples*, Wiley.

