

امراجعة النهائية النظري وتمارين محلولة الاحتمال

الصف الثالث الثانوي

منتري توجيه الرياضيات
د. عادل أبو دة

أولاً . نصائح عامة

- (١) أجعل الصفحة الأولى للمسودة وليس الأخيرة حتى تواجه المصحح أولاً لأنها تصحح
- (٢) بعد المسودة اقلب الصفحة فيكون عندك صفحتين متقابلتين
لحل السؤال الأول موضوعي وهو إجباري لا بد من حله
- (٣) بعد ذلك كل صفحتين متقابلتين لفقرة (١) والصفحة المقابلة للفقرة (٢)
- (٤) الأسئلة الثاني والثالث والرابع والخامس اختياري مطلوب حل ثلاثة أسئلة
- (٥) بعد تجهيز ورقتك ابدأ في قراءة ورقة الأسئلة جيداً وجاوب على فقرات السؤال الأول
- (٦) تحديد الأسئلة التي ترغب في إجابتها ولا تبدأ في السؤال إلا إذا كنت تعرفه كله
حتى لاتضيع الوقت
- (٧) جاوب على الفقرات التي تعرفها أولاً ووضعهما في المكان المحدد له
- (٨) لاتأخذ خط لتفضل إجابة أي فقرة وإذا كنت تريد ان تضيف معلومة مباشرة
أحذر أن تكتب إجابة أخرى في الورقة ولكن اجعل اجابتك الاخرى أسفل الاجابة
الأولى دون أن تشير اجابة أخرى
- (٩) بعد انتهائك من الفقرات التي حللتها فكر في الفقرات التي تركتها وأقرأ الفقرة جيداً
وأكتب كل ماتعرفه في تلك الفقرة وما أتراك قد قد يكون صحيحاً أفضل مما تركته
- (١٠) وأخيراً تأكد من أنك جاوبت على كل الفقرات
- (١١) راجع جيداً ولا تنشغل بأي شئ فالزمن ساعتين فقط

ثانياً . نصائح خاصة

لكل فرع قوانينه اقرأ الفقرة جيداً وافهمها فانه يوجد قانون لحل هذه الفقرة وإن شككت
في القانون وأختلط عليك الأمر في قانونين ايهما تستخدم اكتب الحلين وبدون فاصل
هذا إذ لم تكن متأكد فربما يكون أحدهما صح اما إذا تأكدت من القانون فسير على بركة
الله وربنا يوفقكم جميعاً

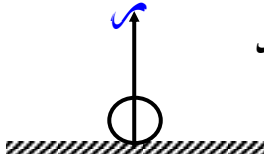
مع أرق أمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح الباهر

الأستاذ / عادل إدوار

موجه أول رياضيات

الجزء النظري

فإذا وضعت كرة على نضد فإنها تؤثر بقوة الفعل ، و النضد يؤثر عليها بقوة رد الفعل و تكون هاتين القوتين متساويتين في المقدار و متضادتين في الإتجاه و يلاحظ أن : هاتين القوتين لا تؤثران في جسم واحد فالفعل يؤثر في النضد و رد الفعل يؤثر في الكرة



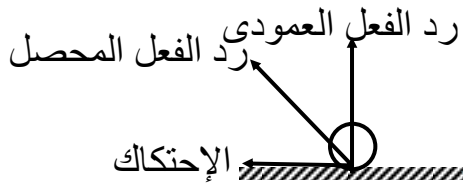
قوة الإحتكاك " ح " :

هي قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن

ملاحظات :

* رد الفعل في حالة السطوح الملساء يكون عمودياً على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين

* رد الفعل في حالة الأجسام الخشنة له مركبتين أحدهما



موازية لسطح التماس هي قوة الإحتكاك و الأخرى

عمودية على سطح التماس هي قوة رد الفعل العمودي

قوة الإحتكاك النهائية " ك " :

هي القيمة النهائية لمقدار قوة الإحتكاك و التي عندها يكون عندها الجسم على وشك الحركة

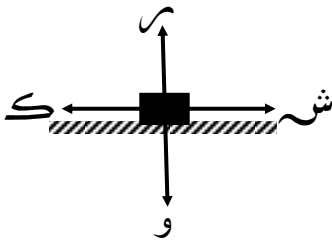
أو متحرك و نقطة نهايته مع موضع الجسم

معامل الإحتكاك " م " :

هو النسبة بين مقداري قوة الإحتكاك النهائي " ك " و رد الفعل العمودي " م "

$$\text{أي أن : } \mu = \frac{K}{M} \text{ وبالتالي فإن : } K = \mu M$$

ملاحظة :



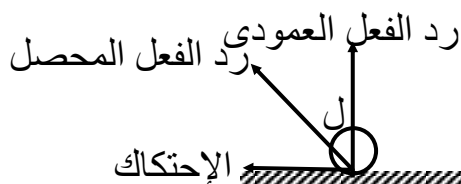
المتساوية $K = \mu M$ تتحقق فقط عند الإحتكاك النهائي

و هي أقصى قيمة يمكن أن يصل إليها مقدار قوة الإحتكاك

أي أن : عندما يكون الجسم على وشك الحركة أو متحركاً بالفعل يكون : $\mu \geq \mu$

زاوية الإحتكاك :

هي الزاوية المحصورة بين خطي عمل رد الفعل العمودي و رد الفعل المحصل



" عندما يصبح الإحتكاك نهائى فإن :

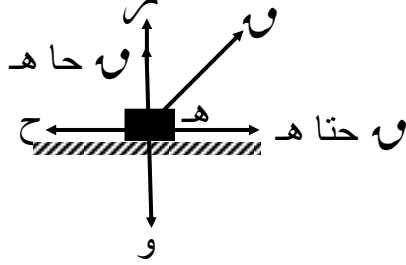
$$\text{طال} = \frac{K}{M} = \mu$$

إتزان جسم على مستو أفقى خشن :

بفرض أن جسم وزنه " و " متزن على مستو أفقى خشن
و تؤثر عليه قوة مقدارها ق و تميل على الأفقى بزاوية قياسها " هـ " فإن :

$$ح = ق \cos هـ ، \quad م = ق \sin هـ + و$$

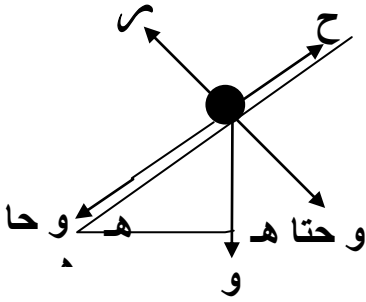
ملاحظات :



- عندما يكون الجسم ملاصقاً للمستوى فإن :
 $م < و ، \quad و < ق \cos هـ$
- عندما يكون الجسم على وشك الحركة تحت تأثير القوة فإن :
 $ح = م = ق \cos هـ$ وبالتالى يكون :
 $م = ق \sin هـ + و$
- إذا كانت ق أفقية نضع هـ = 0 فى العلاقات السابقة

إتزان جسم على مستو مائل خشن :

بفرض أن جسم وزنه " و " متزن على مستو مائل خشن يميل على الأفقى
بزاوية قياسها هـ فإن :



$$ح = و \cos هـ ، \quad م = و \sin هـ$$

ملاحظات :

- إذا كان الجسم على وشك الإنزلاق فإن :

$$م = و \cos هـ ، \quad م = و \sin هـ$$

وبالتالى فإن : م = ط هـ

إذا كان قياس زاوية ميل المستوى > قياس زاوية الإحتكاك فإن الجسم يكون متزناً على المستوى أى لا يكون الإحتكاك نهائى و ليكون الإحتكاك نهائى نؤثر على الجسم بقوة فى إتجاه خط أكبر ميل إلى أسفل تجعله على وشك الحركة لأسفل أو

نؤثر على الجسم بقوة فى إتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى تجعله على وشك الحركة لأعلى

- إذا كان قياس زاوية ميل المستوى < قياس زاوية الإحتكاك فإن الجسم لا يكون متزناً " ينزلق " على المستوى و ليكون الإحتكاك نهائى نؤثر على الجسم بقوة فى إتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى بحيث تكون القوة كافية لمنعه من الإنزلاق لأسفل أو نؤثر على الجسم بقوة فى إتجاه خط أكبر ميل إلى أسفل بحيث تكون القوة كافية لمنعه من الإنزلاق لأسفل

- إذا الجسم على وشك الحركة لأسفل فإن إتجاه م م يكون لأعلى

و إذا الجسم على وشك الحركة لأعلى فإن إتجاه م م يكون لأسفل

مفاهيم أساسية : (نعلم أن)

* **الكمية المتجهة** : هي الكمية التي تتعين بمعرفة مقدارها وإتجاهها

مثل : الإزاحة ، السرعة ، العجلة ، القوة

* **الكمية القياسية** : هي الكمية التي تتعين بمعرفة مقدارها مثل : الزمن ، الكتلة ، الحجم

* معيار المتجه : إذا كان \vec{P} متجه فإن مقداره يسمى معيار المتجه ويرمز بالرمز P أو $||\vec{P}||$

* يمكن تمثيل المتجه هندسياً بقطعة مستقيمة موجهة بحيث يكون طولها ممثلاً لمعيار المتجه "

وفق مقياس رسم مناسب " وإتجاهها هو إتجاه المتجه

* **متجه الموضع لنقطة معلومة** :

إذا كانت $P = (P_1, P_2)$ وفق نظام إحداثي متعامد فيه :

\vec{S} متجه وحدة أساسي " متجه تمثله قطعة مستقيمة موجهة مبدؤها نقطة

الأصل " و " لنظام إحداثي متعامد ومعياره الوحدة في إتجاه \vec{S} و \vec{S}

\vec{S} متجه وحدة أساسي " متجه تمثله قطعة مستقيمة موجهة مبدؤها نقطة S

الأصل " و " لنظام إحداثي متعامد ومعياره الوحدة في إتجاه \vec{S} و \vec{S}

فإن : \vec{P} و \vec{P} " يسمى متجه الموضع لنقطة P بالنسبة لنقطة الأصل " و "

، يسمى P_1 المركبة الجبرية للمتجه \vec{P} في إتجاه \vec{S}

، يسمى P_2 المركبة الجبرية للمتجه \vec{P} في إتجاه \vec{S}

* إذا كان $\vec{P} = (P_1, P_2)$ فإن $\vec{P} = P_1 \vec{S} + P_2 \vec{S}$: فإن $\vec{P} = P_1 \vec{S} + P_2 \vec{S}$

* إذا كان $\vec{P} = P_1 \vec{S} + P_2 \vec{S}$ ، $\vec{B} = B_1 \vec{S} + B_2 \vec{S}$ و كان :

$$\vec{P} - \vec{B} = (P_1 - B_1) \vec{S} + (P_2 - B_2) \vec{S}$$

* $\vec{P} \parallel \vec{B}$ فإن : $P_1 B_2 - P_2 B_1 = 0$ = صفر

* $\vec{P} \perp \vec{B}$ فإن : $P_1 B_2 + P_2 B_1 = 0$ = صفر

* **الزاوية بين متجهين** :

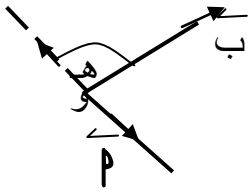
هي الزاوية الصغرى المحصورة قطعتين مستقيمتين

موجهتين لهما نفس نقطة البداية أو النهاية

" خارجيتين من (داخلتين في) نفس النقطة "

* إذا كان h قياس الزاوية الصغرى بين متجهين فإن $0^\circ \leq h \leq 180^\circ$

ملاحظة :



فى الشكل المقابل : إذا كانت القطعتان المستقيمتان الموجهتان لمتجهين
إحدهما خارجة من نقطة " و " ، والأخرى خارجة من نقطة " و "
فإن : الزاوية الصغرى بين المتجهين تكون هى الزاوية المحصورة بين
إحدى القطعتين الموجهتين وإمتداد القطعة الموجهة الأخرى من جهة " و "

* حاصل الضرب القياسى لمتجهين :

هو الكمية القياسية المساوية لحاصل ضرب معيار المتجه الأول فى معيار المتجه الثانى فى

جيب تمام الزاوية الصغرى المحصورة بينهما

$$\text{أى أن : } \vec{P} \odot \vec{B} = |\vec{P}| |\vec{B}| \cos \theta$$

حيث : $\vec{P} \odot \vec{B}$ حاصل الضرب القياسى ، θ ، $|\vec{P}|$ ، $|\vec{B}|$ معيارى المتجهين

$$* \text{ إذا كان : } \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \text{ ، } \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \text{ ، } \vec{P} \odot \vec{B} = \vec{P}_1 \odot \vec{B}_1 + \vec{P}_1 \odot \vec{B}_2 + \vec{P}_2 \odot \vec{B}_1 + \vec{P}_2 \odot \vec{B}_2$$

$$\text{فإن : } \vec{P} \odot \vec{B} = \vec{P}_1 \odot \vec{B}_1 + \vec{P}_2 \odot \vec{B}_2$$

* نتائج :

$$* \vec{P} \odot \vec{P} = \vec{P} \odot \vec{P} = |\vec{P}|^2 \cos 0 = |\vec{P}|^2 \text{ ، حيث : } \vec{P} \odot \vec{P} \text{ هو المتجه الصغرى}$$

$$* \vec{P} \odot \vec{B} = \vec{B} \odot \vec{P}$$

* حاصل الضرب القياسى لأى متجه فى نفسه يساوى مربع معياره

$$\text{أى أن : لأى متجه } \vec{P} \text{ يكون : } \vec{P} \odot \vec{P} = |\vec{P}|^2$$

* حاصل الضرب القياسى لمتجهين غير صفرين يكون :

* موجباً إذا كانت الزاوية الصغرى حادة

* سالباً إذا كانت الزاوية الصغرى منفرجة

* صفراً إذا كانت الزاوية الصغرى قائمة

* حاصل الضرب الإتجاهى لمتجهين :

إذا كان \vec{P} ، \vec{B} متجهين غير صفرين فإن حاصل الضرب الإتجاهى للمتجه \vec{P} فى المتجه \vec{B}

$$\text{"يرمز له بالرمز } \vec{P} \times \vec{B} \text{ " يعرف كالآتى : } \vec{P} \times \vec{B} = |\vec{P}| |\vec{B}| \sin \theta \vec{C}$$

حيث θ قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين ، \vec{C} متجه وحدة عمودى على المستوى

الذى يقع فيه المتجهين

$$* \text{ إذا كان : } \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \text{ ، } \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \text{ ، } \vec{P} \times \vec{B} = \vec{P}_1 \times \vec{B}_1 + \vec{P}_1 \times \vec{B}_2 + \vec{P}_2 \times \vec{B}_1 + \vec{P}_2 \times \vec{B}_2$$

$$\vec{P} \times \vec{B} = (\vec{P}_1 \times \vec{B}_1 + \vec{P}_2 \times \vec{B}_1 + \vec{P}_1 \times \vec{B}_2 + \vec{P}_2 \times \vec{B}_2)$$

حيث: \vec{e} متجه وحدة عمودي على الذى يجمع \vec{s} ، \vec{v} " \vec{s} ، \vec{v} ، \vec{e} مجموعة يمينية "

* ملاحظات و نتائج :

$$\begin{aligned} * \vec{p} \times \vec{b} \text{ هو متجهه ، معياره } \|\vec{p} \times \vec{b}\| = p \sin \theta \text{ حيث } \theta \text{ زاوية بين } \vec{p} \text{ و } \vec{b} \\ * \text{ متجه الوحدة فى إتجاه } \vec{p} \times \vec{b} \text{ هو المتجه } \vec{u} = \frac{\vec{p} \times \vec{b}}{\|\vec{p} \times \vec{b}\|} \end{aligned}$$

$$* \vec{p} \times \vec{p} = \vec{0} \times \vec{p} = \vec{0} \times \vec{0} = \vec{0}$$

$$* \vec{p} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{p})$$

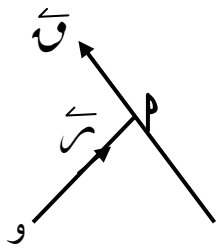
$$* \text{ إذا كان } \vec{p} \parallel \vec{b} \text{ فإن } \vec{p} \times \vec{b} = \vec{0} \text{ صفر}$$

$$\begin{aligned} * \vec{s} \times \vec{v} = \vec{e} \text{ ، } \vec{e} \times \vec{s} = -\vec{v} \text{ ، } \vec{v} \times \vec{e} = \vec{s} \text{ ، } \vec{s} \times \vec{e} = -\vec{v} \\ * \vec{v} \times \vec{s} = -\vec{e} \text{ ، } \vec{s} \times \vec{v} = \vec{e} \text{ ، } \vec{e} \times \vec{v} = -\vec{s} \text{ ، } \vec{v} \times \vec{e} = \vec{s} \end{aligned}$$

* المعنى الهندسى لمعيار حاصل الضرب الإتجاهى لمتجهين :

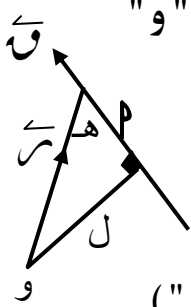
معيار حاصل الضرب الإتجاهى لأى متجهين يمثل هندسياً مساحة سطح متوازى الأضلاع الذى فيه القطعتين المستقيمتين الموجهتين الممثلتين لهذين المتجهين ضلعين متجاورين فيه أو يساوى ضعف مساحة المثلث الذى فيه هاتين القطعتين ضلعين فى المثلث

عزم قوة بالنسبة لنقطة :



* تعريف : يعرف عزم القوة \vec{M}_O بالنسبة للنقطة "و" ويرمز له بالرمز \vec{M}_O على أنه الكمية المتجهة $\vec{r} \times \vec{F}$ أى أن : $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$

حيث : \vec{r} متجه الموضع لأى نقطة "م" مثلاً على خط عمل القوة بالنسبة للنقطة "و"



ملاحظات :

$$1- \|\vec{M}_O\| = r \sin \theta = l \text{ حيث } \theta \text{ زاوية بين } \vec{r} \text{ و } \vec{F}$$

حيث : l هو ذراع القوة (طول العمود الساقط على خط عمل القوة من النقطة "و")

2- وحدة قياس معيار عزم قوة بالنسبة لنقطة = وحدة قياس طول \times وحدة قياس معيار قوة

3- عزم قوة بالنسبة لنقطة ثابت لأى نقطة على خط عمل القوة

4- عزم قوة بالنسبة لأى نقطة على خط عملها هو المتجه الصفري

" معيار عزم قوة بالنسبة لأى نقطة على خط عملها = صفر "

أو يساوى ضعف مساحة سطح المثلث الذى فيه هاتين القطعتين ضلعين فى المثلث

- (١) إذا كان $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ فإن خط عمل المحصلة يمر بنقطة ب
- (٢) إذا كان $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|$ فإن خط عمل المحصلة // ب \vec{a}
- (٣) إذا كان $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}|$ فإن خط عمل المحصلة ينصف ب \vec{a}
- (٤) إذا كانت $\vec{c} // \vec{b}$ فإن $\vec{c} = k \vec{b}$
- (٥) إذا كانت $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ، $\vec{b} = (b_1, b_2)$ فإن منتصف \vec{b} = $(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2})$

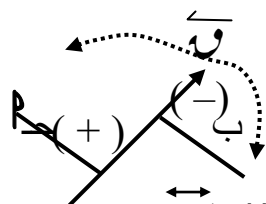
عزوم القوى المستوية :

جميع متجهات عزوم القوى المستوية " التي تقع خطوط عملها في مستو واحد " بالنسبة لنقطة واقعة في نفس المستوى تكون متوازية وعمودية على مستوى هذه القوى و معيار كل منها يساوي حاصل ضرب معيار القوة في طول العمود الساقط من النقطة على خط عملها

قاعدة الإشارة لعزم قوة حول نقطة :

عزم قوة حول نقطة يكون موجباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة ، ويكون سالباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة في نفس اتجاه دوران عقارب الساعة ، ويكون صفراً إذا كان خط عمل القوة يمر بنفس النقطة

ففي الشكل المقابل :



عزم ق حول \vec{a} موجب ، عزم ق حول ب سالب ، عزم ق حول ح = صفر

نتائج :

- * إذا كان عزم \vec{c} حول \vec{a} = عزم \vec{c} حول ب فإن خط عمل $\vec{c} // \vec{a}$
- * إذا كان عزم \vec{c} حول \vec{a} = - (عزم \vec{c} حول ب) فإن خط عمل \vec{c} يمر بمنتصف \vec{a}

نظرية العزوم :

مجموع عزوم عدة قوى متلاقية في نقطة بالنسبة لأي نقطة في الفراغ يساوي عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة

القوى المتوازية المستوية

نعلم أن :

- لتعيين محصلة مجموعة من القوى المتلاقية في نقطة يلزم معرفة : ١ - معيارها
 - الاتجاه الذي تعمل فيه إذ أن خط عملها يمر بنقطة تلاقي مجموعة القوى
- أما : لتعيين محصلة مجموعة القوى غير المتلاقية في نقطة و التي تؤثر في جسم متماسك يلزم معرفة :

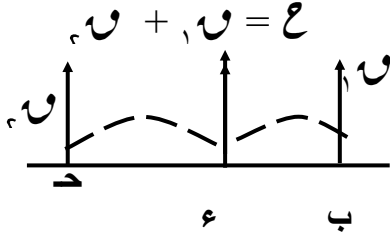
٢ - الإتجاه الذى تعمل فيه

١ - معيارها

٣ - خط عملها أى معرفة نقطة من الجسم يمر بها خط عمل المحصلة

* محصلة قوتين متوازيتين :

١ - القوتان متحدتا الإتجاه :



محصلة قوتين متوازيتين ومتحدى الإتجاه هى قوة :

(١) معيارها = مجموع معيارى القوتين أى : $ق١ + ق٢ = ح$

(٢) إتجاهها هو نفس إتجاه القوتين

(٣) خط عملها يقسم المسافة بين خطى عمل القوتين من الداخل بنسبة عكسية

لمعياريهما أى من الشكل المقابل يكون : $ق١ \times ب = ق٢ \times ع$

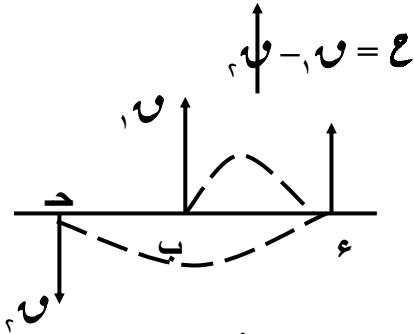
نتائج :

١ - محصلة قوتين متوازيتين ومتساويتين فى المعيار ومتحدى الإتجاه هى قوة معيارها

ضعف معيار إحدى القوتين وفى إتجاهيهما و خط عملها ينصف المسافة بين القوتين

٢ - إذا كان : $ق١ < ق٢$ فإن : $ع < ب$

٢ - القوتان متضادتان فى الإتجاه :



محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الإتجاه هى قوة :

(١) معيارها = الفرق بين معيارى القوتين

أى : $ح = ق١ - ق٢$ حيث : $ق١ < ق٢$

(٢) إتجاهها هو إتجاه القوة ذات المعيار الأكبر

(٣) خط عملها يقسم المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج ناحية القوة الأكبر

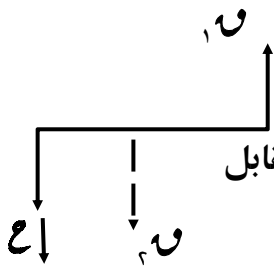
بنسبة عكسية لمعياريهما أى من الشكل المقابل يكون : $ق١ \times ب = ق٢ \times ع$

ملاحظة : إذا علم معيار إحدى قوتين متوازيتين $ق١$ ومعيار محصلتيهما $ح$ فلتعيين معيار القوة الثانية $ق٢$

يراعى :

١ - إذا كانت $ق١$ ، $ح$ فى إتجاهين متضادتين : فإن : $ق٢ = ح + ق١$

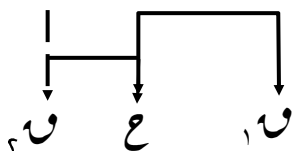
و خط عمل $ق٢$ يقع بين خطى عمل $ق١$ ، $ح$ وفى إتجاه $ح$ كما بالشكل المقابل



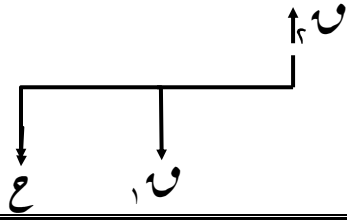
٢ - إذا كانت $ق١$ ، $ح$ فى إتجاه واحد :

(١) إذا كان : $ح < ق١$ فإن : $ق٢ = ق١ - ح$ خط عمل $ق٢$ يقع خارج

خطى عمل $ق١$ ، $ح$ ناحية $ح$ وفى إتجاه $ح$ كما بالشكل المقابل



المراجعة النهائية للطلاب الثانوية فى الاستاتيكا (٨) سنترى توجيه الرياضيات ماحول إدوار



(٢) إذا كان : $ح > ق$ فإن : $ق = ق - ح$
خط عمل $ق$ يقع خارج خطى عمل $ق$ ، $ح$ ناحية $ق$
وفى إتجاه $ح$ كما بالشكل المقابل

* محصلة عدة قوى متوازية و مستوية :

الخطوات :

١ - نفرض متجه وحدة فى إتجاه إحدى القوى ويكون :

القياس الجبرى للمحصلة = مجموع القياسات الجبرية للقوى

٢ - القياس الجبرى لعزم المحصلة حول نقطة إختيارية فى مستوى القوى = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نفس النقطة

* توازن أكثر من ثلاث قوى متوازية مستوية :

إذا أترن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية فإن :

١ - مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى = صفر

٢ - مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أية النقطة فى مستويها = صفر

إتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

إذا أترن جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :-

١ - مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى = صفر

٢ - مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها = صفر

ملاحظات : ١- إذا كان القضيب على وشك الدوران = على وشك الانقلاب = دون أن ينقلب

= دون أن يختل كل هذا يعنى أن القضيب ما زال متزنا

٢- إذا كان القضيب على وشك الدوران حول ج فإن $م = ٠$

٣- إذا كان القضيب على وشك الدوران حول ع فإن $م = ٠$

٤- يفضل عند أخذ العزوم أخذها عند نقطة بها مجهول



الإتزان - إختزال مجموعة من القوى - القوى المكافئة

إذا أثرت مجموعة القوى $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ ، $ق_٤$ ، $ق_٥$ فى النقط ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ،

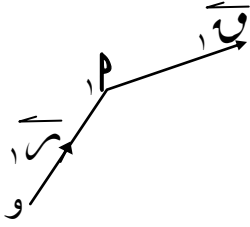
على الترتيب ، كانت " و " نقطة الأصل الواقعة فى نفس مستوى القوى وكانت

$م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$ ، $م_٤$ ، $م_٥$ هى متجهات مواضع هذه النقط على الترتيب

بالنسبة لنقطة الأصل " و " فإن :

(١) متجه مجموع القوى $م$: $م = ق_١ + ق_٢ + ق_٣ + ق_٤ + ق_٥$

أو $\vec{r}_m = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_n$



حيث : $\vec{r}_m = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_n$

وذلك بوضع : $m = 1, 2, 3, \dots, n$ في \vec{r}_m وجمع النواتج

(٢) متجه عزوم القوى بالنسبة للنقطة "و" : \vec{G}_w

$$\vec{G}_w = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n$$

$$\text{أو } \vec{G}_w = \vec{r}_m \times \vec{F}_m$$

وذلك بوضع : $m = 1, 2, 3, \dots, n$ في $\vec{r}_m \times \vec{F}_m$ وجمع النواتج

ملاحظات :

* \vec{G}_w لا يتغير بتبديل النقط $1, 2, 3, \dots, n$ بنقط أخرى اختيارية مختارة

إختياراً مناسباً بحيث تكون واقعة على نفس خطوط عمل مجموعة القوى على الترتيب

* يمكن الإكتفاء بحساب القياس الجبرى لمتجه عزوم القوى منسوباً لمتجه وحدة عمودى

على مستوى القوى و بالتالى عزم القوة = مقدار القوة \times ذراعها مع الأخذ فى الإعتبار أن عزم القوة

يكون موجباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول "و" فى عكس إتجاه دوران عقارب الساعة و

يكون سالباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول "و" فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة

العلاقة بين عزمى مجموعة محدودة من القوى بالنسبة لنقطتين :

إذا أثرت مجموعة القوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ فى النقط $1, 2, 3, \dots, n$

على الترتيب ، كانت "و" ، "و'" واقعتان فى نفس مستوى القوى و كانت

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$: $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ هى متجهات مواضع هذه النقط على الترتيب

بالنسبة للنقطة "و" ، وكانت $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$: $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ هى متجهات

مواضع هذه النقط على الترتيب بالنسبة للنقطة "و'" و كان $\vec{G}_w, \vec{G}_{w'}$ عزمى مجموعة القوى بالنسبة

للنقطتين "و" ، "و'" على الترتيب ، \vec{G}_w متجه مجموع هذه القوى فإن : $\vec{G}_w = \vec{G}_{w'} + \vec{r}_w \times \vec{G}_{w'}$

نظرية : إذا إنعدم مجموع القوى كان عزم المجموعة ثابتاً لا يتوقف على النقطة

التي ننسب إليها هذا العزم

الإتزان العام

تعريف : إذا إنعدم مجموع القوى و إنعدم عزم المجموعة بالنسبة لأي نقطة قيل أن المجموعة متزنة و إذا

أثرت مثل هذه المجموعة على جسم ما قيل أن هذا الجسم متزن

نظرية : إذا أنعدم مجموع القوى لمجموعة ما و إنعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة كانت المجموعة متزنة

الشروط الكافية و اللازمة لإتزان مجموعة من القوى :

لكي تتوازن مجموعة من القوى يلزم و يكفي أن تتحقق الشروط الآتية :

(١) ينعدم متجه مجموع القوى

" ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى في إتجاهين متعامدين واقعين في مستويها "

(٢) ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة

" ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة في مستويها "

أي : $\sum \vec{F} = 0$ ، $\sum M = 0$ ، $\sum F_x = 0$ ، $\sum F_y = 0$

إختزال مجموعة من القوى المستوية

نعلم أن :

* محصلة عدة قوى متلاقية في نقطة واحدة = مجموع متجهات القوى و خط عمل المحصلة يمر بنفس

النقطة و عزم المحصلة بالنسبة لأي نقطة في الفراغ = مجموع عزوم القوى بالنسبة لنفس النقطة

* محصلة عدة قوى متوازية و لا ينعدم مجموعها = مجموع متجهات القوى و خط عمل المحصلة يتحدد

بتطبيق نظرية العزوم و عزم المحصلة بالنسبة لأي نقطة في الفراغ = مجموع عزوم القوى بالنسبة

لنفس النقطة وفي كلتا الحالتين نحصل على قوة واحدة " المحصلة " تصل عمل القوى أي تكافئها و

بالتالي أختزلت القوى

خطوات إختزال مجموعة من القوى المستوية :

نوجد محصلة القوى أي : $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$

نوجد \vec{G} مجموع عزوم القوى بالنسبة لأي نقطة

(١) إذا كان : $\vec{R} = 0$ فإن المجموعة تؤول إلى قوة \vec{F} عزمها حول نفس النقطة = \vec{G}

(٢) إذا كان : $\vec{R} = \vec{G}$ ، $\vec{F} = 0$ فإن المجموعة تكون متوازنة

ملاحظة : حيث أن القوى مستوية يمكن بإيجاد القياسات الجبرية لمتجهات عزوم القوى

منسوبة لمتجه وحدة عمودي على مستوى القوى

تكافؤ مجموعات القوى

تعريف :

يقال لمجموعتين من القوى أنهما متكافئتان إذا تساوى :

١ - مجموعا القوى فى المجموعتين ٢ - عزم المجموعتين بالنسبة لكل نقطة

نظرية : إذا تساوى مجموعا القوى لمجموعتين من القوى و تساوى عزمهما بالنسبة لنقطة واحدة كانت المجمعتان متكافئتين

الشروط الكافية و اللازمة لتكافؤ مجموعتين من القوى :

لكى تتكافأ مجموعتان من القوى يلزم و يكفى أن تتحقق الشروط الآتية :

(١) يتساوى مجموعا القوى فى المجموعتين " يتساوى مجموعا المركبات الجبرية للقوى فى

المجموعتين فى أى إتجاهين متعامدين واقعين فى مستوى القوى "

(٢) يتساوى عزم المجموعتين بالنسبة لنقطة واحدة

" يتساوى مجمعا القياسات الجبرية لعزى المجمعتين حول نقطة واحدة فى مستوى

القوى " أى : $\sum \vec{r} = \sum \vec{r}'$ ، $\sum \vec{v} = \sum \vec{v}'$ ، $\sum \vec{u} = \sum \vec{u}'$

ملحوظات :

* لا يتحقق تكافؤ المجموعتين إذا لم يتساوى أى من :

$\sum \vec{r} = \sum \vec{r}'$ ، $\sum \vec{v} = \sum \vec{v}'$ ، $\sum \vec{u} = \sum \vec{u}'$

* تظل الشروط السابقة صحيحة فى حالة أن يكون متجه الوحدة \vec{r} ، \vec{v} ، \vec{u}

غير متوازيين و غير متعامدين

* عزم مجموعتين من القوى المستوية بالنسبة لأى ثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة تتكافأ

* عزم مجموعتين من القوى بالنسبة لنقطتين واقعيتين فى مستوى القوى و تساوى مجموعى القوى فى

إتجاه غير عمودى على الخط الواصل بين هاتين النقطتين متكافئتان

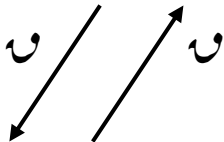
الإزدواجات

تعريف :

الإزدواج هو مجموعة مكونة من قوتين متساويتين فى المقدار

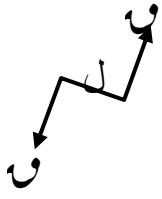
و متضادتين فى الإتجاه و لا يجمعهما خط عمل واحد

نظرية :



عزم الإزدواج هو متجه ثابت ، لا يعتمد على النقطة التي ينسب إليها عزمي قوته ،
و هو يساوى عزم إحدى قوته بالنسبة لأي نقطة على خط عمل القوة الأخرى

معيار عزم الإزدواج :

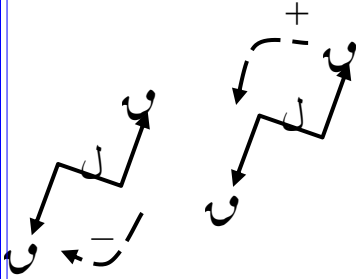


* معيار عزم الإزدواج = معيار إحدى قوته × البعد العمودى بين خطى عملهما

$$\text{أى أن : } \|\vec{C}\| = Q \times L$$

(يسمى " ل " البعد العمودى بين خطى عمل قوتى الإزدواج بذراع الإزدواج)

إشارة القياس الجبرى لعزم الإزدواج :



يكون القياس الجبرى لعزم الإزدواج موجباً إذا كانت قوته تعملان فى
عكس إتجاه دوران عقارب الساعة ، ويكون سالباً إذا كانت قوته
تعملان فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة

توازن إزدواجين :

يتوازن إزدواجان مستويان معاً إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفري

أى : إذا إنعدم المجموع الجبرى للقياسين الجبريين لمتجهى عزميهما

$$" \quad |_1 + |_2 = 0 \quad \text{أو} \quad |_1 - |_2 = 0 "$$

تكافؤ إزدواجين :

يتكافئ إزدواجان مستويان معاً إذا كان وجد إزدواج ثالث فى مستويهما يتوازن مع كل

منهما أى : إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما " $|_1 = |_2$ "

مجموع إزدواجين مستويين :

مجموع إزدواجين مستويين هو إزدواج عزمه يساوى مجموع عزمى هذين الإزدواجين أى : القياس

الجبرى لعزم مجموع إزدواجين مستويين = مجموع القياسين الجبريين

$$\text{لعزميهما} \quad " \quad | = |_1 + |_2 "$$

مجموع أى عدد محدود من الإزدواجات المستوية :

مجموع أى عدد محدود من الإزدواجات المستوية هو إزدواج يساوى مجموع عزوم هذه الإزدواجات

أى : القياس الجبرى لعزم مجموعة إزدواجات مستوية = مجموع القياسات الجبرية لعزومها

$$" \quad | = |_1 + |_2 + \dots + |_n "$$

ملاحظة : إذا كان : $| = 0$ فإن : مجموعة الإزدواجات تكون متوازنة

قاعدة هامة :

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية في جسم متماسك و مثلها تمثيلاً تاماً أضلاع مثلث مأخوذة في ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئاً إزدواجاً معيار عزمه يساوى ضعف مساحة سطح المثلث \times م حيث : م ثابت يساوى عدد وحدات مقدار القوة التى تمثلها وحدة الأطوال
" م = مقدار القوة \div طول الضلع الممثل لها "

تعريف

(١) إذا أنعدم مجموع القوى و لم ينعدم عزم المجموعة فإن هذه المجموعة تكون

إزدواجاً و يكون عزم هذه المجموعة هو عزم الإزدواج

(٢) إذا كان : $\vec{G} = \vec{0}$ ، $\vec{G} \neq \vec{0}$ فإن المجموعة تؤول إلى إزدواج
عزمه المحصل $= \vec{G}$

* إذا كانت مجموعة القوى تتكون من قوتين متساويتين في المقدار و متضادتين في

الاتجاه و لا يجمعهما خط عمل واحد فإنها تكون إزدواجاً

معيار عزمه = معيار إحدى القوتين \times البعد العمودى بين خطى عمل القوتين

قاعدة :

إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط في مستويها ليست على إستقامة واحدة يساوى مقدار ثابت كانت المجموعة تكافئاً إزدواجاً يساوى القياس الجبرى لعزمه هذا المقدار الثابت و إذا كان المقدار الثابت يساوى الصفر فإن مجموعة القوى تكو

الاسئلة الموضوعية (سؤال إجباري)

❖ السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات.

١- إذا كان : $\vec{m} + \vec{m}_2 = \vec{c}$, $\vec{m}_1 + \vec{m}_2 = \vec{c}$, $\vec{m} - \vec{m}_1 = \vec{a}$

..... = $\vec{r} \perp (\vec{u} \times \vec{v})$ فإن

$$(1) \quad \vec{u} + \vec{v} \quad (2) \quad \vec{u} - \vec{v} \quad (3) \quad \vec{u} \quad (4) \quad \vec{v}$$

٢- إذا كان \vec{F} ، \vec{u} متجهين غير صفريين ، θ قياس الزاوية الصغرى التي يحصران هذان المتجهان عند رسمهما

خارجين من نقطة واحدة ، \vec{u} متجه وحدة عمودي على مستويهما فإن $\vec{u} \times \vec{v} = \dots\dots\dots$

(1) ab حاء (2) ab حاء (3) ab حاء (4) ab حاء

٣ - يقع جسم تحت تأثير القوى : \vec{Q} , $\vec{Q}_1 = \vec{Q} + \vec{Q}_2$, $\vec{Q}_2 = \vec{Q} - \vec{Q}_1$, $\vec{Q}_3 = \vec{Q} - \vec{Q}_1 - \vec{Q}_2$ فليكن كل

..... الجسم متزنا فإن $(p, u) =$

$$(V_-, r_-)(s) \quad (V_-, r_-)(x) \quad (V_-, r_-)(\omega) \quad (V_-, r_-)(1)$$

٤ - في الشكل المقابل : $m \parallel n$ ، مستطيل فيه $\angle 1 = 130^\circ$ ، $\angle 8 = ?$

اثرات القوى المبينة مقاديرها واتجاهاتها بالرسم فكونت أزواجين متوازنين

فإن: $(\dots\dots\dots, \dots\dots\dots) = (v, v)$

(۱) (۶ نیوٹن ، ۴ نیوٹن) (۲) (۶ نیوٹن ، ۸ نیوٹن)

(ح) (۸ نیوٹن ، ۴ نیوٹن) (ز) (۴ نیوٹن ، ۱۲ نیوٹن)

٥ - زاوية الاحتكاك هي الزاوية المحصورة بين قوة

(١) الإحتكاك وقوة رد الفعل العمودي (ب) رد الفعل المحصل وقوة رد الفعل العمودي

(ح) الإحتكاك والوزن (س) رد الفعل المحصل والوزن

٦ - إذا اتصل قضيب بأحد طرفيه ρ بمفصل مثبت في حائط رأسي وكانت m, m_1, m_2 هما المركبتين الجبريتين لقوة

رد فعل المفصل وكانت مـ = ٣ ث كجم ، مـ = ٤ ث كجم فإن قوة رد فعل المفصل تساوي

(۱) ۵ ٹ کجم (۲) ۱ ٹ کجم (۳) ۷ ٹ کجم (۴) ۷۷ ٹ کجم

إجابة السؤال الأول

(۱) صفر (۲) - ۱ - ۲ جای (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) (۸) (۹) (۱۰) (۱۱) (۱۲) (۱۳) (۱۴) (۱۵) (۱۶) (۱۷) (۱۸) (۱۹) (۲۰) (۲۱) (۲۲) (۲۳) (۲۴) (۲۵) (۲۶) (۲۷) (۲۸) (۲۹) (۳۰) (۳۱) (۳۲) (۳۳) (۳۴) (۳۵) (۳۶) (۳۷) (۳۸) (۳۹) (۴۰) (۴۱) (۴۲) (۴۳) (۴۴) (۴۵) (۴۶) (۴۷) (۴۸) (۴۹) (۵۰) (۵۱) (۵۲) (۵۳) (۵۴) (۵۵) (۵۶) (۵۷) (۵۸) (۵۹) (۶۰) (۶۱) (۶۲) (۶۳) (۶۴) (۶۵) (۶۶) (۶۷) (۶۸) (۶۹) (۷۰) (۷۱) (۷۲) (۷۳) (۷۴) (۷۵) (۷۶) (۷۷) (۷۸) (۷۹) (۸۰) (۸۱) (۸۲) (۸۳) (۸۴) (۸۵) (۸۶) (۸۷) (۸۸) (۸۹) (۹۰) (۹۱) (۹۲) (۹۳) (۹۴) (۹۵) (۹۶) (۹۷) (۹۸) (۹۹) (۱۰۰) (۱۰۱) (۱۰۲) (۱۰۳) (۱۰۴) (۱۰۵) (۱۰۶) (۱۰۷) (۱۰۸) (۱۰۹) (۱۱۰) (۱۱۱) (۱۱۲) (۱۱۳) (۱۱۴) (۱۱۵) (۱۱۶) (۱۱۷) (۱۱۸) (۱۱۹) (۱۲۰) (۱۲۱) (۱۲۲) (۱۲۳) (۱۲۴) (۱۲۵) (۱۲۶) (۱۲۷) (۱۲۸) (۱۲۹) (۱۳۰) (۱۳۱) (۱۳۲) (۱۳۳) (۱۳۴) (۱۳۵) (۱۳۶) (۱۳۷) (۱۳۸) (۱۳۹) (۱۴۰) (۱۴۱) (۱۴۲) (۱۴۳) (۱۴۴) (۱۴۵) (۱۴۶) (۱۴۷) (۱۴۸) (۱۴۹) (۱۵۰) (۱۵۱) (۱۵۲) (۱۵۳) (۱۵۴) (۱۵۵) (۱۵۶) (۱۵۷) (۱۵۸) (۱۵۹) (۱۶۰) (۱۶۱) (۱۶۲) (۱۶۳) (۱۶۴) (۱۶۵) (۱۶۶) (۱۶۷) (۱۶۸) (۱۶۹) (۱۷۰) (۱۷۱) (۱۷۲) (۱۷۳) (۱۷۴) (۱۷۵) (۱۷۶) (۱۷۷) (۱۷۸) (۱۷۹) (۱۸۰) (۱۸۱) (۱۸۲) (۱۸۳) (۱۸۴) (۱۸۵) (۱۸۶) (۱۸۷) (۱۸۸) (۱۸۹) (۱۹۰) (۱۹۱) (۱۹۲) (۱۹۳) (۱۹۴) (۱۹۵) (۱۹۶) (۱۹۷) (۱۹۸) (۱۹۹) (۲۰۰) (۲۰۱) (۲۰۲) (۲۰۳) (۲۰۴) (۲۰۵) (۲۰۶) (۲۰۷) (۲۰۸) (۲۰۹) (۲۱۰) (۲۱۱) (۲۱۲) (۲۱۳) (۲۱۴) (۲۱۵) (۲۱۶) (۲۱۷) (۲۱۸) (۲۱۹) (۲۲۰) (۲۲۱) (۲۲۲) (۲۲۳) (۲۲۴) (۲۲۵) (۲۲۶) (۲۲۷) (۲۲۸) (۲۲۹) (۲۳۰) (۲۳۱) (۲۳۲) (۲۳۳) (۲۳۴) (۲۳۵) (۲۳۶) (۲۳۷) (۲۳۸) (۲۳۹) (۲۴۰) (۲۴۱) (۲۴۲) (۲۴۳) (۲۴۴) (۲۴۵) (۲۴۶) (۲۴۷) (۲۴۸) (۲۴۹) (۲۵۰) (۲۵۱) (۲۵۲) (۲۵۳) (۲۵۴) (۲۵۵) (۲۵۶) (۲۵۷) (۲۵۸) (۲۵۹) (۲۶۰) (۲۶۱) (۲۶۲) (۲۶۳) (۲۶۴) (۲۶۵) (۲۶۶) (۲۶۷) (۲۶۸) (۲۶۹) (۲۷۰) (۲۷۱) (۲۷۲) (۲۷۳) (۲۷۴) (۲۷۵) (۲۷۶) (۲۷۷) (۲۷۸) (۲۷۹) (۲۸۰) (۲۸۱) (۲۸۲) (۲۸۳) (۲۸۴) (۲۸۵) (۲۸۶) (۲۸۷) (۲۸۸) (۲۸۹) (۲۹۰) (۲۹۱) (۲۹۲) (۲۹۳) (۲۹۴) (۲۹۵) (۲۹۶) (۲۹۷) (۲۹۸) (۲۹۹) (۳۰۰) (۳۰۱) (۳۰۲) (۳۰۳) (۳۰۴) (۳۰۵) (۳۰۶) (۳۰۷) (۳۰۸) (۳۰۹) (۳۱۰) (۳۱۱) (۳۱۲) (۳۱۳) (۳۱۴) (۳۱۵) (۳۱۶) (۳۱۷) (۳۱۸) (۳۱۹) (۳۲۰) (۳۲۱) (۳۲۲) (۳۲۳) (۳۲۴) (۳۲۵) (۳۲۶) (۳۲۷) (۳۲۸) (۳۲۹) (۳۳۰) (۳۳۱) (۳۳۲) (۳۳۳) (۳۳۴) (۳۳۵) (۳۳۶) (۳۳۷) (۳۳۸) (۳۳۹) (۳۴۰) (۳۴۱) (۳۴۲) (۳۴۳) (۳۴۴) (۳۴۵) (۳۴۶) (۳۴۷) (۳۴۸) (۳۴۹) (۳۵۰) (۳۵۱) (۳۵۲) (۳۵۳) (۳۵۴) (۳۵۵) (۳۵۶) (۳۵۷) (۳۵۸) (۳۵۹) (۳۶۰) (۳۶۱) (۳۶۲) (۳۶۳) (۳۶۴) (۳۶۵) (۳۶۶) (۳۶۷) (۳۶۸) (۳۶۹) (۳۷۰) (۳۷۱) (۳۷۲) (۳۷۳) (۳۷۴) (۳۷۵) (۳۷۶) (۳۷۷) (۳۷۸) (۳۷۹) (۳۸۰) (۳۸۱) (۳۸۲) (۳۸۳) (۳۸۴) (۳۸۵) (۳۸۶) (۳۸۷) (۳۸۸) (۳۸۹) (۳۹۰) (۳۹۱) (۳۹۲) (۳۹۳) (۳۹۴) (۳۹۵) (۳۹۶) (۳۹۷) (۳۹۸) (۳۹۹) (۴۰۰) (۴۰۱) (۴۰۲) (۴۰۳) (۴۰۴) (۴۰۵) (۴۰۶) (۴۰۷) (۴۰۸) (۴۰۹) (۴۱۰) (۴۱۱) (۴۱۲) (۴۱۳) (۴۱۴) (۴۱۵) (۴۱۶) (۴۱۷) (۴۱۸) (۴۱۹) (۴۲۰) (۴۲۱) (۴۲۲) (۴۲۳) (۴۲۴) (۴۲۵) (۴۲۶) (۴۲۷) (۴۲۸) (۴۲۹) (۴۳۰) (۴۳۱) (۴۳۲) (۴۳۳) (۴۳۴) (۴۳۵) (۴۳۶) (۴۳۷) (۴۳۸) (۴۳۹) (۴۴۰) (۴۴۱) (۴۴۲) (۴۴۳) (۴۴۴) (۴۴۵) (۴۴۶) (۴۴۷) (۴۴۸) (۴۴۹) (۴۵۰) (۴۵۱) (۴۵۲) (۴۵۳) (۴۵۴) (۴۵۵) (۴۵۶) (۴۵۷) (۴۵۸) (۴۵۹) (۴۶۰) (۴۶۱) (۴۶۲) (۴۶۳) (۴۶۴) (۴۶۵) (۴۶۶) (۴۶۷) (۴۶۸) (۴۶۹) (۴۷۰) (۴۷۱) (۴۷۲) (۴۷۳) (۴۷۴) (۴۷۵) (۴۷۶) (۴۷۷) (۴۷۸) (۴۷۹) (۴۸۰) (۴۸۱) (۴۸۲) (۴۸۳) (۴۸۴) (۴۸۵) (۴۸۶) (۴۸۷) (۴۸۸) (۴۸۹) (۴۹۰) (۴۹۱) (۴۹۲) (۴۹۳) (۴۹۴) (۴۹۵) (۴۹۶) (۴۹۷) (۴۹۸) (۴۹۹) (۵۰۰) (۵۰۱) (۵۰۲) (۵۰۳) (۵۰۴) (۵۰۵) (۵۰۶) (۵۰۷) (۵۰۸) (۵۰۹) (۵۱۰) (۵۱۱) (۵۱۲) (۵۱۳) (۵۱۴) (۵۱۵) (۵۱۶) (۵۱۷) (۵۱۸) (۵۱۹) (۵۲۰) (۵۲۱) (۵۲۲) (۵۲۳) (۵۲۴) (۵۲۵) (۵۲۶) (۵۲۷) (۵۲۸) (۵۲۹) (۵۳۰) (۵۳۱) (۵۳۲) (۵۳۳) (۵۳۴) (۵۳۵) (۵۳۶) (۵۳۷) (۵

(٤) (٦ نيوتن ، ٤ نيوتن) (٥) رد الفعل المحصل وقوة رد الفعل العمودي

(۶) ۵ ٹ کجھ

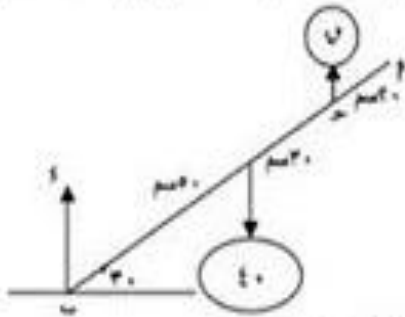
❖ السؤال الثانى : إخترا الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات.

١ - إذا كان \vec{a} ، \vec{b} متجهان غير صفريان وقياس الزاوية بينهما α فإن : $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \alpha$
 $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha$
 $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$
 $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \tan \alpha$

٢ - إذا كان متجه عزمه القوة \vec{r} بالنسبة للنقطة O $\vec{M} = (2, 3)$ و $\vec{r} = (1, 0)$ فإن متجه عزمها بالنسبة للنقطة A $\vec{M}_A = (.....,)$

(١) $(2, 3)$ (ب) $(1, 1)$ (ج) $(6, 4)$ (د) $(3, 0)$

٣ - فى الشكل المقابل : \vec{a} ، \vec{b} قضيبتان منتظم ومتزن تحت تأثير القوى الموضحة بالشكل فإن $\vec{c} =$ ث كجم



(١) ١٥ (ب) $\frac{25}{3}$ (ج) ٢٥ (د) $\frac{25}{2}$

٤ - إذا كان \vec{r}_1 ، \vec{r}_2 ، \vec{r}_3 هما قوتى ازدواج وكان $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}_3$ فإن $\vec{r}_4 =$

(١) $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (ب) $\vec{r}_1 - \vec{r}_3$ (ج) $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{r}_3$ (د) $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$

٥ - يتوقف معامل الاحتكاك بين جسمين على

(١) شكلهما (ب) وزناهما

(ج) طبيعة الجسمين المتلامسين (د) حجم كل من الجسمين

٦ - الشرط اللازم والكافى لإتزان مجموعة من القوى هو

(١) انعدام متجه مجموع القوى (ب) أن تكون متلاقية فى نقطة

(ج) أن تكون متوازية (د) انعدام متجه مجموع القوى وانعدام متجه عزوم القوى حول أى نقطة

إجابة السؤال الثانى

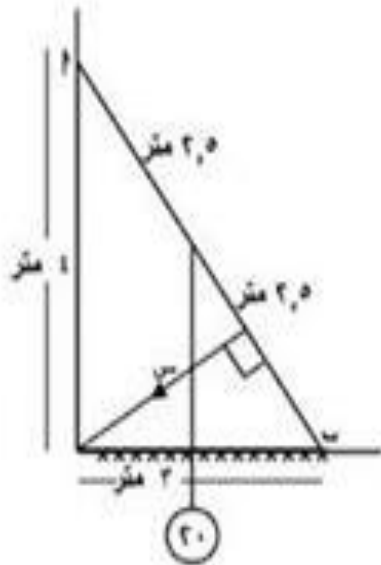
(١) $\vec{a} \times \vec{b}$ (٢) $(1, 1)$ (٣) ٣٥

(٤) $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{r}_3$ (٥) طبيعة الجسمين المتلامسين

(٦) انعدام متجه مجموع القوى وانعدام متجه عزوم القوى حول أى نقطة

❖ السؤال الثالث : أكمل كلاً مما يأتي .

- (١) إذا كان $\vec{a} = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ ، $\vec{b} = 12\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$ ، θ هي قياس الزاوية بين \vec{a} ، \vec{b} فإن $\cos \theta = \dots\dots\dots$
- (٢) تؤثر القوة \vec{F} ، $\vec{F} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ في النقطة $P(4, 2)$ وتؤثر القوة \vec{Q} ، $\vec{Q} = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2$ في النقطة $(-1, 2)$ فإن المحصلة تؤثر في النقطة $\dots\dots\dots$
- (٣) إذا كان خط عمل القوة \vec{F} ينصف حدة \overline{AB} فإن $\dots\dots\dots$
- (٤) الأزواج عبارة عن $\dots\dots\dots$
- (٥) إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان قياس زاوية المستوى على الأفقى أكبر من قياس زاوية الاحتكاك فإن الجسم $\dots\dots\dots$



- (٦) في الشكل المقابل : سلم منتظم طوله ٥ متر ووزنه ٢٠ ث كجم يستند بطرفه P على حائط رأسي أملس وبطرفه B على أرض أفقية خشنة وممنوع من الانزلاق بواسطة حبل مشدود من إحدى نقط السلم إلى نقطة تقاطع الحائط مع الأرض واتجاه الحبل عمودي على اتجاه السلم وكان مقدار رد فعل الحائط على الطرف $P = \frac{120}{\sqrt{5}}$ ث كجم فإن مقدار الشد $\dots\dots\dots$

إجابة السؤال الثالث

- (١) $\frac{3.2}{1.5}$
- (٢) $(\frac{8}{7}, 0)$
- (٣) $\vec{F} = \vec{Q}$
- (٤) قوتان متوازيتان ومتساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه
- (٥) لا يمكن أن يتزن الجسم على المستوى
- (٦) $\frac{150}{\sqrt{5}}$ ث كجم

❖ السؤال الرابع : أكمل كلاً مما يأتي ..

(١) إذا كان $\vec{A} = (١, ٢)$ ، $\vec{B} = (٣, ١)$ ، $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ، $\vec{D} = (١, ٢)$ حيث $\{ \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \}$ مجموعة بميلية
فإن $\vec{A} \perp (\vec{B} \times \vec{C}) = \dots\dots\dots$

(٢) إذا كان المجموع الجبري لعزوم مجموعة من القوى المستوية غير المتزنة حول نقطة ما يساوى صفراً فإن هذه
النقطة

(٣) إذا تساوى مجموع عزوم عدة قوى حول كل من النقطتين A ، B ولكن مع الاختلاف في الإشارة فإن خط عمل
المحصلة

(٤) إذا التزن جسم تحت تأثير إزدواج وقوتين فإن هاتين القوتين تكون

(٥) إذا وضع جسم على مستوى خشن يميل على الأفق بزاوية قياسها θ وكان معامل الاحتكاك يساوى طال وكان
الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط فإن $\mu = \dots\dots\dots$

(٦) يمكن أن ينزّل سلم إذا ارتكز بطرفه العلوي على حائط رأسي أملس وطرفه السفلي على أرض أفقية

إجابة السؤال الرابع

(١) صفر (٢) تقع على خط عمل المحصلة (٣) ينصف \vec{AB}

(٤) تكون إزدواج عزمه يساوى عزم الإزدواج الأول ولكنه مختلف عنه في الإشارة

(٥) قياس زاوية θ (٦) خشنة

❖ السؤال الخامس: أكمل كلاً مما يأتي .

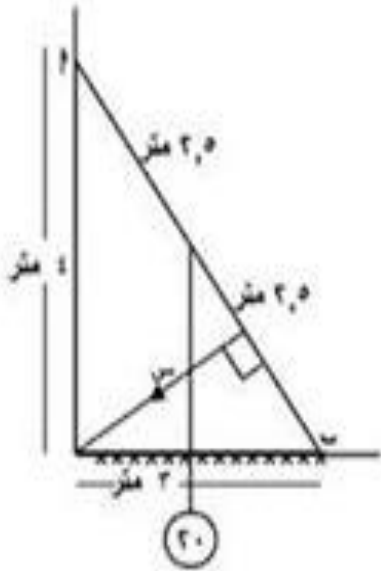
- ١ - إذا كان: $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}$ ، $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}$ ، $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}$ فإن $\vec{r} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \dots$
- ٢ - إذا كان متجه عزم القوة \vec{r} بالنسبة للنقطة $P(2, -3)$ ومتجه عزمها بالنسبة للنقطة $Q(0, 1)$ فإن خط عمل \vec{r}
 $\vec{r} = (1, 0)$
- ٣ - مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة بالنسبة لأية نقطة في الفراغ يساوي
- ٤ - إذا كان \vec{r}_1 ، \vec{r}_2 متجهي عزمي أزواجين مستويين فإن الأزواجين يكونا متوازنين إذا كان
- ٥ - معامل الاحتكاك هو النسبة بين
- ٦ - الشروط الكافية لإتزان مجموعة من القوى . (١)
 (٢)

إجابة السؤال الخامس

- (١) $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (٢) ينصف \vec{r}
- (٣) عزم المحصلة حول نفس النقطة (٤) $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$
- (٥) مقداري قوة الاحتكاك النهائي ورد الفعل العمودي
- (٦) (١) بنعم متجه مجموع القوى
- (٢) بنعم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة

❖ السؤال السادس: أكمل كلاً مما يأتي .

- (١) إذا كان $\vec{a} = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ ، $\vec{b} = 12\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$ ، θ هي قياس الزاوية بين \vec{a} ، \vec{b} فإن $\cos \theta = \dots\dots\dots$
- (٢) تؤثر القوة \vec{F} ، $\vec{F} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ في النقطة $P(2, 4)$ وتؤثر القوة \vec{Q} ، $\vec{Q} = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2$ في النقطة $(-1, 2)$ فإن المحصلة تؤثر في النقطة $\dots\dots\dots$
- (٣) إذا كان خط عمل القوة \vec{F} ينصف حدة \overline{AB} فإن $\dots\dots\dots$
- (٤) الأزواج عبارة عن $\dots\dots\dots$
- (٥) إذا وضع جسم على مستوى مائل خشبي وكان قياس زاوية المستوى على الأفقى أكبر من قياس زاوية الاحتكاك فإن الجسم $\dots\dots\dots$



- (٦) في الشكل المقابل : سلم منتظم طوله ٥ متر ووزنه ٢٠ ث كجم يستند بطرفه P على حائط رأسي أملس وبطرفه B على أرض أفقية خشنة وممنوع من الانزلاق بواسطة حبل مشدود من إحدى نقط السلم إلى نقطة تقاطع الحائط مع الأرض واتجاه الحبل عمودي على اتجاه السلم وكان مقدار رد فعل الحائط على الطرف $P = \frac{120}{\sqrt{5}}$ ث كجم فإن مقدار الشد $\dots\dots\dots$

إجابة السؤال السادس

(١) $\frac{22}{15}$ (٢) $(\frac{4}{3}, 0)$ (٣) $\vec{c} = -\vec{a}$

(٤) قوتان متوازيتان ومتساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه

(٥) لا يمكن أن يتزن الجسم على المستوى (٦) $\frac{120}{\sqrt{5}}$ ث كجم

الاسئلة المقالية (أجب عن ثلاث أسئلة من أربعة)

(١)

١- سلم منتظمة طوله ٢٠٠ سم ووزنه ٦٤ ثقل كجم يرتكز بطرفه ١ على مستوى أفقى أملس وبطرفه ٢ على حائط رأسى أملس حفظ السلم من الانزلاق بواسطة حبل ربط أحد طرفيه بقاعدة الحائط رأسياً أسفل ٢ ، ربط طرفه الآخر فى إحدى درجات السلم على بعد ١ من يساوى ٥٠ سم . فإذا كان الطرف ٢ على بعد ١٦٠ سم من المستوى الأفقى فأوجد ضغط السلم على كل من المستوى الأفقى والحائط وكذا الشد فى الحبل .

الحل

جاي $\frac{4}{9\sqrt{3}}$ ، جتاى $\frac{9}{9\sqrt{3}}$

من التوازن : مر = شه جاي + ٦٤ = مر ، مر = شه جتاى

(١) $\frac{4}{9\sqrt{3}}$ شه + ٦٤ = مر

(٢) $\frac{9}{9\sqrt{3}}$ شه = مر

ج = ٠

مر = ٦٤ + مر = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

شه = ٩٧٧٤ ث كجم ، مر = ٨٠ ث كجم ، مر = ٣٦ ث كجم

(٢) \vec{v}_1 ، \vec{v}_2 ، \vec{v}_3 ثلاث قوى متوازية ومتزنة تؤثر فى النقط ١ = (٤ ، ١) ، ٢ = (٣ ، ٣) ، ٣ = (٢٠ ، ١٠) . أوجد \vec{v}_1 ، \vec{v}_2 إذا كانت $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

الحل

$$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \parallel \vec{v}_3 \quad \therefore \vec{v}_1 = k \vec{v}_2 = m \vec{v}_3$$

$$\vec{v}_1 = m \vec{v}_2 \quad \text{حيث } k = m \geq 0$$

$$\text{ومنها } ١ + k + m = ٠ \quad (١)$$

$$\text{ومنها } k = \frac{2}{9} \text{ من } (١) \quad \therefore m = \frac{1}{9}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{9} (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$$

$$\therefore \text{المجموعة متزنة : } \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \quad \therefore \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

$$\therefore \frac{1}{9} (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1$$

(3) اثبت ان: $\|\vec{c} \times \vec{A}\| = \|\vec{c}\| \|\vec{A}\| \sin \theta$ ، حيث θ هي الزاوية بين \vec{c} و \vec{A} ، $\|\vec{c}\| = c$ ، $\|\vec{A}\| = A$ ، والمتجهان \vec{c} ، \vec{A} غير صفريين

الحل بالتعويض عن $\|x\|_2 = \|u\|_2 = 1$ ،

$$\mu \circ \tau = (\tau \circ \mu)$$

(۴) ا ب ج د مستطیل فیہ | ب = ۱۲ سم ، ج د = ۸ سم ، ا د ⊥ ج د حیث ح = ۵ سم اثرت قوی مقادیرها

٨، ١١، ١٣، ١٥، ١٢، ٣، ٥ نيوتن في الاتجاهات \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} ، \vec{e} ، \vec{f} ، \vec{g} على الترتيب .
أوجد مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول كل من النقطتين h ، m .

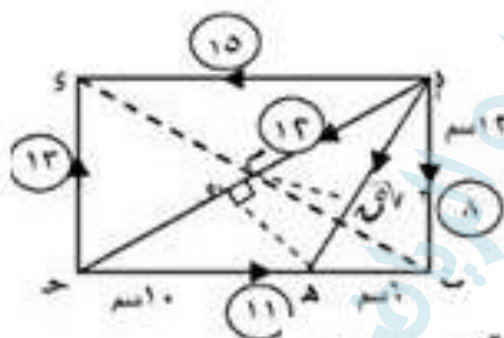
الحل

من فیثاغورث : $h^2 = a^2 + b^2$ ، $a^2 = h^2 - b^2$

، هـ = و ، ا ح ا ح ب = آسم

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u}{\Delta t} \therefore \Delta u = \Delta t \cdot \frac{u}{\Delta t}$$

∴ \overline{AM} ينصف BC ح



$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial V_1} = \frac{1}{\partial V_1} \times 10 = 10 \text{ حـا } 10 = 10 \text{ حـا } 10 = 10$$

ج = ۷۴ نیوٹن سم ، ج = ۷۲ نیوٹن سم

(٥) μ ح صفيحة رقيقة على شكل مثلث قائم الزاوية في μ حيث $\mu = 1.8$ سم ، $\mu = 2.4$ سم ووزنها

٥٠٠ ثقل جرام يؤثر في نقطة تقاطع المستقيمت المتوسطة . علقت الصليحة تعليقاً حراً في مسار أفقي من

الرأس ١ بحيث كان مستواها رأسيًا أو جد معيار عزم الازدواج الذي يجعل \overline{AB} أفقيًا.

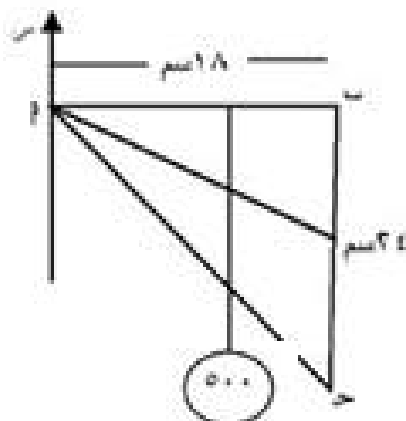
الحل

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r}{t} = s \cdot p$$

$$\mu_{\text{eff}}(\tau) = \lambda \times \frac{\tau}{\tau_0} = 5 \text{ p.u.}$$

معیار عزم الإزواج المطلوب

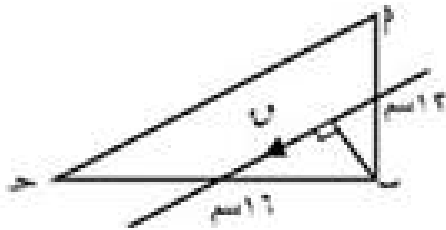
$$12 \times 500 = 6000 \text{ ٹھہرے}$$



(٦) م ب مثلث قائم الزاوية في ب فيه م ب = ١٢ سم ، م ح = ١٦ سم . أثرت قوة \vec{Q} في مستوى المثلث وكان القياس الجبري لعزم \vec{Q} حول كل من م ، ح = ٩٦ نيوتن.سم والقياس الجبري لعزم \vec{Q} حول ب = ٩٦ نيوتن.سم عين مقدار واتجاه خط عمل \vec{Q} .

الحل

$$\vec{Q} \cdot \vec{r}_B = \vec{Q} \cdot \vec{r}_C = \vec{Q} \cdot \vec{r}_M$$



خط عمل القوة $\vec{Q} \parallel \vec{BM}$ وينصف كل من م ب ، م ح .

$$\vec{Q} \cdot \vec{r}_B = 96 \text{ نيوتن.سم} \Rightarrow \vec{Q} \cdot \vec{r}_B = \frac{12 \times 16}{2} = 96$$

$$\vec{Q} = 40 \text{ نيوتن}$$

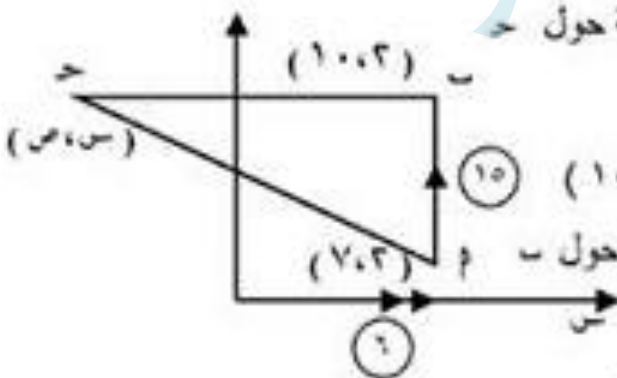
(٧) النقط م (٧، ٢) ، ب (١٠، ٢) ، ح (٤، ٥) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب . أثرت القوى ١٥ ، ١٠ ، ٦ ن ثقل كجم في الأضلاع م ب ، ب ح ، ح م على الترتيب ، فإذا كانت المحصلة تساوي ٦ ن ثقل كجم وتعمل في الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد :
أولاً : إحداثي نقطة ح
ثانياً : مقدار \vec{Q}

الحل

المثلث قائم الزاوية م ب ح ، ١٠ = م ب

مجموع عزوم القوى حول ح = عزم المحصلة حول ح

$$10 \times 6 = (5 - 2) \times 15$$



ب م = ٢ ، إحداثي نقطة ح (١٠، ٢)

مجموع عزوم القوى حول م = عزم المحصلة حول م

$$\vec{Q} \cdot \vec{r}_M = \frac{1 \times 2}{2} \Rightarrow 10 \times 6 = \frac{1 \times 2}{2} \Rightarrow \vec{Q} = 20 \text{ ن ثقل كجم}$$

(٨) مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{3}{4}$ ، وضع عليه جسم وزنه ١٠٠ نيوتن ، فإذا كان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{1}{4}$ ، فأوجد مقدار القوة التى تؤثر فى الجسم موازية لخط أكبر فى المستوى لتجعله على وشك الحركة .

الحل

أولا : عندما يكون الجسم على وشك الانزلاق :

$$R = 100 \text{ جناه}$$

$$W = R + 100 \text{ جناه}$$

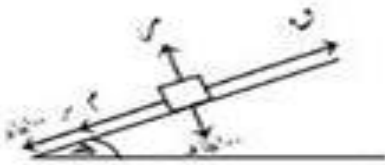
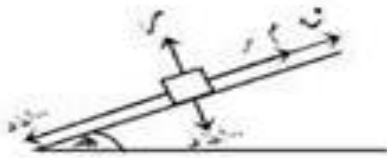
ثم التعويض $W = 82$ نيوتن

ثانيا : عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأعلى :

$$R = 100 \text{ جناه}$$

$$W = R + 100 \text{ جناه}$$

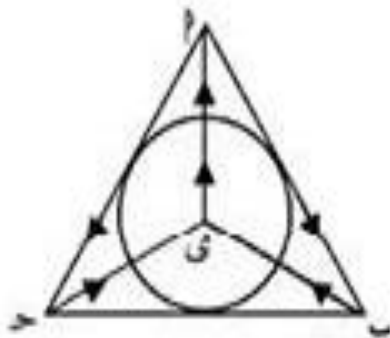
ثم التعويض $W = 110$ نيوتن



(٩) P, Q, R مثلث ، O مركز الدائرة الداخلة . أثرت خمس قوى فى P, Q, R, S, T على الترتيب فإذا كانت مقادير هذه القوى تمثل بالأطوال P, Q, R, S, T على الترتيب . فبرهن أنها تكافئ إزدواجاً وأوجد عزمه بدلالة أطوال P, Q, R ، ونصف قطر الدائرة الداخلة . متى تتوازن هذه القوى ؟

الحل

القوى التى يمثلها P, Q, R, S, T



تكافئ إزدواج عزمه $\Delta PQR = S \times P = Q \times R$ (١)

، القوى التى يمثلها P, Q, R, S, T تكافئ إزدواج

عزمه $\Delta PQR = S \times P = Q \times R$ (٢)

∴ المجموعة تكافئ إزدواج عزمه $S \times P = Q \times R = (P + Q + R) \times O$

$$S \times P = Q \times R$$

وتتوازن هذه المجموعة عند عزم الإزدواج = صفر

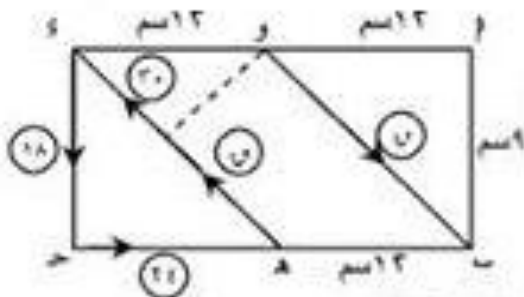
(١٠) \vec{a} و \vec{b} مستطيل فيه $|\vec{a}| = 9$ سم ، $|\vec{b}| = 12$ سم ، \vec{a} و \vec{b} متعامدا ، \vec{c} على الترتيب ، أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ٢٤ ، ٣٠ نيوتن في \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} على الترتيب . أوجد القوتين اللتين تؤثران في \vec{a} و \vec{b} حتى تتزن المجموعة .

الحل في Δ \vec{a} و \vec{b} : القوى تتناسب مع الأضلاع (الثابت = ٢)

، القوى في اتجاه دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ إزدواج

$$\text{عزمه} = 9 \times 12 \times \frac{1}{2} \times 2 = 216 \text{ نيوتن.سم}$$



، القوتان المؤثرتان في \vec{a} و \vec{b} تكونان إزدواج عزمه = ٢١٦ نيوتن.سم

$$\therefore 216 = \frac{1}{2} \times 12 \times x \Rightarrow x = 30 \text{ نيوتن}$$

(١١) القوتان \vec{a} و \vec{b} $|\vec{a}| = 3$ سم ، $|\vec{b}| = 4$ سم ، \vec{a} و \vec{b} تؤثران في النقطة $P(1, 1)$ برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة يوازي المستقيم المار بالنقطتين $A(1, 2)$ ، $B(4, 6)$. ثم أوجد طول العمود الساقط من B على خط عمل المحصلة .

الحل

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \text{ تؤثر في } P(1, 1)$$

$$\therefore \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{c} = 25$$

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{c} = 25$$

$$\therefore \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{c} \text{ ، } \therefore \text{خط عمل المحصلة} \parallel \text{المستقيم } \vec{c}$$

طول العمود الساقط من B على خط عمل المحصلة

$$0.6 = \frac{3}{9 + 16\sqrt{5}} = \frac{\|\vec{c}\|}{\|\vec{c}\|} =$$

(١٢) قوتان متوازيتان وفي اتجاه واحد مقدارهما ٤٠ ، ٣٠ ث جم تؤثران في النقطتين P ، S على الترتيب من جسم متماسك . فإذا انتقلت نقطة تأثير القوة التي مقدارها ٤٠ ث جم مسافة قدرها L على الشعاع \overrightarrow{SP} بحيث تظل هذه القوة موازية للقوة الأخرى . اثبت أن نقطة تأثير محصلة القوتين تنتقل مسافة قدرها $\frac{L}{4}$.

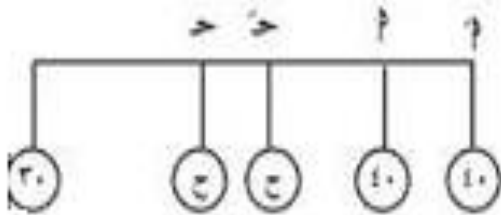
الحل

قبل انتقال القوة ٤٠ ث.جم :

$$(١) \quad 40 \times P = 30 \times S \quad \therefore 4P = 3S$$

بعد انتقال القوة ٤٠ ث.جم موازية للقوة ٣٠ ث.جم في اتجاه \overrightarrow{SP}

$$40 \times P' = 30 \times S' \quad \therefore 4P' = 3S'$$



$$4(P' - S') = 3(S' - P') \quad \therefore 4P' - 4S' = 3S' - 3P'$$

$$4P' + 3P' = 4S' + 3S' \quad \therefore 7P' = 7S' \quad \therefore P' = S'$$

$$\text{من (١) } \therefore 4L = 3L' \quad \therefore L' = \frac{4}{3}L$$

(١٣) P ح د صفیحة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ٩ سم ووزنها ٨ نیوتن معلقة ومستواها رأسيا في مسمار أفقی من ثقب صغير بالقرب من الرأس A .

أوجد الضغط على المسمار . وإذا أثر على الصفیحة في نفس مستویها ازدواج عزمه ١٨ نیوتن سم فآترنت . أوجد ميل القطر \overrightarrow{AP} على الرأس في وضع التوازن ثم أوجد عزم الإزدواج اللازم للتأثير به في نفس مستوى الصفیحة وجعلها تتزن بشرط أن يميل الضلع \overrightarrow{AP} على الرأسی بزاوية ١٥° .

الحل

تؤثر في نقطة S (٨ ، ٥)

$$\text{نفرض أن } \vec{Q} = \vec{MS} + \vec{MS}$$

$$(١) \quad \text{ومنها } 11 = M - 5$$

$$\vec{Q} = \vec{MS} \times \vec{Q} = 11$$

$$(٢) \quad \text{ومنها } 5 = M^2 + M - 12$$

$$\vec{Q} = \vec{MS} \times \vec{Q} = 5$$

$$(٣) \quad 100 = M + M - 6$$

$$\vec{Q} = \vec{MS} \times \vec{Q} = 100$$

$$\therefore M = 3, L = 4 \quad \therefore \vec{Q} = 3 + 4 = 7$$

$$\text{من (١) ، (٢) ، (٣)}$$

(١٤) سطح أفقى خشن على شكل مربع $PQRS$ ، m ملتقى قطريه . وضع جسم وزنه 10 ثقل جرام عند m وأثرت عليه قوتان كل منهما تساوى 5 ثقل جرام فى اتجاه \vec{mS} ، \vec{mQ} وبقي الجسم متزنًا . أوجد الاحتكاك وإذا دار المربع حول S بزاوية قدرها 30° فأصبح الجسم على وشك الحركة فأوجد معامل الاحتكاك .

الحل

$$(i) \vec{F} = -\vec{G} \quad \therefore \vec{F} = \vec{G} \times \vec{r} \quad \therefore 0 = \vec{F} \text{ ومنها } m = 30$$

$$(ii) \text{ المركبة الجبرية } = 30, 40$$

(١٥) قضيب مهمل الوزن طوله 60 سم معلق من مسمار فى منتصفه . أثرت قوتان عموديتان على القضيب ومتضادتان مقدار كل منهما 15 نيوتن فى طرفيه ، كما شد بخيط يميل عليه بزاوية قياسها 60° من نقطة Q ، P أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير القوة التى إذا أثرت على القضيب مع القوى السابقة حفظته فى حالة توازن وهو أفقى إذا كان الشد فى الخيط يساوى 20 نيوتن .

الحل

(١٥ ، ١٥) يكونان إزدواج عزمه

$$900 = 60 \times 15 = 900 \text{ نيوتن سم}$$

$$\therefore (20, 20) \text{ يكونان إزدواج عزمه } = 900$$

$$\therefore 2000 \times \sin 60^\circ = 900 \text{ سم} \quad \therefore \sin 60^\circ = \frac{900}{2000}$$

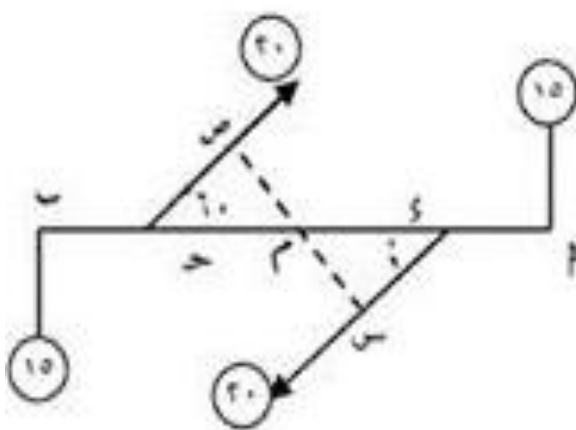
$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{9}{20} = 0.45$$

$$\therefore \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{9}{20} \quad \therefore \sin 60^\circ = \frac{9}{40} = 0.225$$

$$\therefore \text{القوة المطلوبة} = 20 \text{ نيوتن}$$

وتضع زاوية قياسها 60° وتؤثر فى نقطة S

$$\text{حيث } d = 30 \text{ سم}$$



(١٦) قضيب منتظم P - وزنه 5 ث كجم وطوله 2 متر يتركز بطرفه السفلى P على أرض أفقية خشنة . حفظ القضيب من الانزلاق عندما كان يميل على الأفقى بزاوية قياسها 60° بواسطة خيط ربط أحد طرفيه بنهاية القضيب P والطرف الآخر للخيط ثبت في نقطة C تقع رأسيا فوق P بحيث يصنع الخيط مع القضيب زاوية قياسها 90° . أوجد : أولا : مقدار الشد في الخيط ثانيا : رد فعل الأرض

ثالثا : قوة الاحتكاك بين القضيب والأرض

الحل

∴ القضيب متزن ∴ $\sum M_P = 0$ جتا 30°

$$\sum M_P = 0 \quad (1) \quad \frac{3\sqrt{3}}{2} S = 5$$

$$S = \frac{5}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{3\sqrt{3}} \text{ ث كجم} \quad \therefore S = \frac{10}{3\sqrt{3}} \text{ ث كجم}$$

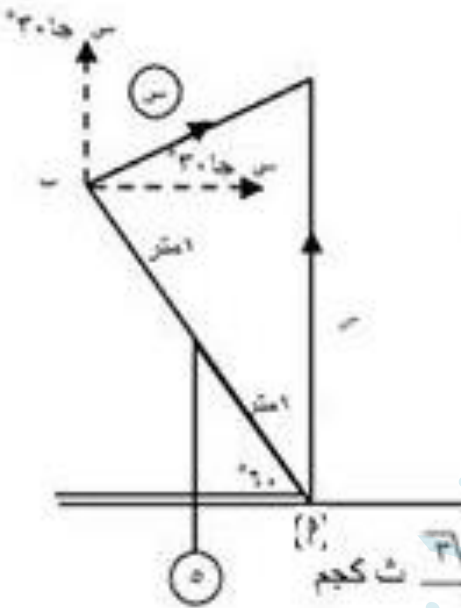
$$\sum F_x = 0 \quad (2) \quad R = \frac{1}{2} S = \frac{5}{3\sqrt{3}} \text{ ث كجم}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \therefore 5 = 1 \times 5 \text{ جتا } 60^\circ - S \times 2 \times \sin 60^\circ$$

$$S = \frac{5}{2} \text{ ث كجم}$$

$$\text{من (2) } R = \frac{5}{2} - 5 = -\frac{5}{2} \text{ ث كجم}$$

$$\text{من (1) } \text{قوة الاحتكاك} = R = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{5}{2} \text{ ث كجم}$$



(١٧) قضيب منتظم طوله 100 سم ووزنه 24 نيوتن معلق من طرفيه في وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين لا يتحمل أى منهما شدا يزيد عن 16 نيوتن . أوجد مواضع النقط التى يمكن أن يعلق منها ثقل مقداره 5 نيوتن دون أن ينقطع أى من الخيطين .

الحل

عند وضع الثقل 5 نيوتن على بعد S من P يكون الشد في الخيط

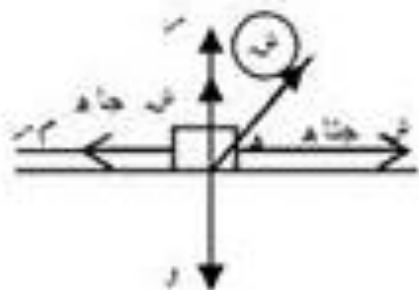
وصل الى قيمته العظمى 16 نيوتن

$$S = 0 \quad \text{أو} \quad S = 20 \text{ سم}$$

أى أنه يوضع الثقل على بعد لا يقل عن 20 سم من أى من الطرفين

(١٨) وضع جسم وزنه (و) على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك بينه وبين الجسم يساوى ظام ثم شد الجسم بحبل فى اتجاه يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فإذا كان الجسم على وشك الحركة . فبرهن على أن الشد فى الحبل يساوى و جا هـ + و جا هـ .

الحل



من التوازن : $و = و جا هـ + و جا هـ$

$$و = و جا هـ + و جا هـ \quad (١)$$

$$و جا هـ = و جا هـ$$

$$\text{من (١) } و جا هـ = و جا هـ + و جا هـ$$

$$و جا هـ = و جا هـ + و جا هـ \quad (٢ - هـ)$$

(١٩) تؤثر القوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ على النقطة $P(1, 1)$ أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة $Q(3, 1)$ ثم احسب طول العمود المرسوم من النقطة Q على خط عمل المحصلة .

الحل

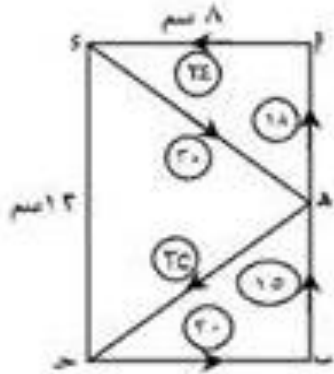
$$(١) \vec{F}_1 = \vec{F}_2 - \vec{F}_3, \text{ تؤثر فى } P(1, 1)$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 - \vec{F}_3 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_2$$

∴ طول العمود المرسوم من النقطة Q على خط عمل المحصلة

$$0.4 = \frac{2}{9 + 16} = \frac{\|\vec{F}_1\|}{\|\vec{F}_2\|}$$

(٢٠) ا ب ح د مستطيل فيه ا ب = ١٢ سم ، ب ح = ٨ سم ، نقطة ه منتصف ا ب ، أثرت قوى مقاديرها ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٠ ، ٢٠ نيوتن في س ا ، ا ب ، ب ح ، ح د على الترتيب . اثبت أن المجموعة تكافئ إزدواجاً وأوجد معيار عزمه .



الحل القوة ٢٣ نيوتن التي تعمل في س ا تكافئ القوتان

١٥ نيوتن في س ه ، ١٨ نيوتن في ه ا

من فيثاغورث $ه ا = ١٠$ سم ، $ح ه = ١٠$ سم

، القوى المؤثرة في أضلاع المثلث ه ا ب :

$$\therefore \text{أي أن القوى تتناسب مع الأضلاع ، } ٢ = \frac{٢٤}{٨} = \frac{٢٠}{١٠} = \frac{١٨}{٦}$$

∴ القوى في اتجاه نوري واحد

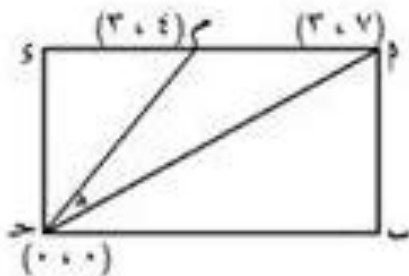
$$\therefore \text{المجموعة تكافئ إزدواج عزمه } = ٦ \times ٨ \times \frac{١}{٦} \times ٢ \times ٢ = ١٤٤ \text{ نيوتن}$$

بالمثل القوى المؤثرة في أضلاع المثلث ح ه ا :

$$\text{المجموعة تكافئ إزدواج عزمه } = ٦ \times ٨ \times \frac{١}{٦} \times ٢ \times \frac{٥}{٦} = ١٢٠ \text{ نيوتن}$$

$$\therefore \text{المجموعة تكافئ إزدواج عزمه } = ١٤٤ + ١٢٠ = ٢٦٤ \text{ نيوتن.سم}$$

(٢١) ا ب ح د مستطيل فيه ا ب = ٣ سم ، ب ح = ٧ سم ، م د بحيث م = ٤ سم . أوجد المسقط الجبري للمتجه ح م على المتجه ح ا .



الحل باعتبار النقطة ح هي (٠،٠)

$$\therefore (٣،٧) = ب ، (٣،٤) = م$$

$$\vec{ح م} = \vec{م} - \vec{ح} ، \vec{ح ا} = \vec{ا} - \vec{ح}$$

$$\text{جنا ، } \frac{\vec{ح م} \circ \vec{ح ا}}{\vec{ح ا}} =$$

$$\text{جنا ه } = \frac{(\vec{م} - \vec{ح}) \circ (\vec{ا} - \vec{ح})}{\vec{ا} - \vec{ح}} = \frac{٣٧}{٥\sqrt{٧}} =$$

$$\therefore \text{مسقط ح م على ح ا} = \vec{ح ا} = \frac{٣٧}{٥\sqrt{٧}} \times ٥ = \frac{٣٧}{\sqrt{٧}} \text{ سم}$$

(٢٢) م قضيب منتظم وزنه ٦٠٠ ثقل جرام وطوله ٢٠ سم يمكنه الدوران بسهولة حول مسار أفقى ثابت يمر بنقبة صغير فى القضيب تبعد ٥ سم عن م . فإذا استند القضيب بطرفه م على نضد أفقى أملس فبرهن أن رد فعل النضد يساوى ٢٠٠ ثقل جرام . وإذا شد الطرف م أفقيا بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساويا وزن القضيب فأوجد الشد فى الحبل ، علما بأن قياس زاوية ميل القضيب على النضد ٣٠° . وكم يكون رد فعل المسار ؟

الحل

فى الحالة الأولى : تم التوازن تحت تأثير ثلاث قوى فقط
١. خطوط عملها إما أن تتوازى أو تتقاطع فى نقطة واحدة ولكن

٢. م ، ٦٠٠ ث جم متوازيان ٣. م تكون موازية لكل منهما

٤. م رأسية لأعلى ، ٥. ج = ٠

٦. م ، ١٥ × جتاى - ٦٠٠ × ٥ جتاى = ٠ ← م ، ٢٠٠ ث جم

فى الحالة الثانية : (٦٠٠ ، ٦٠٠) تكونان إزواج عزمه

٧. م ، ١٠ × ٦٠٠ جتا ٣٠° = ٣٧٢٠٠٠ ث.جم.سم والقوتان م ، م

٨. م ، م تكونان إزواج عزمه = ٣٧٢٠٠٠٠ ث.جم.سم

٩. م ، ٥ × جتا ٣٠° = ٣٧٢٠٠٠٠ ث.جم.سم ← م ، ٣٧١٢٠٠٠ ث جم

١٠. م ، ٣٧١٢٠٠٠ ث جم

(٢٣) إذا كان $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$ ، $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$ فأوجد $\vec{A} \times \vec{B}$ ثم احسب حجم متوازي السطوح القائم الذى قاعدته هى متوازي الأضلاع الذى فيه \vec{A} ، \vec{B} ضلعين متجاورين وارتفاعه هو وحدة المتجهات العمودية على القاعدة .

الحل

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3) \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3) = \vec{C}$$

ومعناه الهندسى هو متجه معياره = ضعف مساحة سطح المثلث

الذى ضلعاه طولاهما $\|\vec{A}\|$ ، $\|\vec{B}\|$

١. حجم متوازي المستطيلات = $\Delta \times$ الارتفاع = $1 \times 7 \times 4 = 14$ وحدة مكعبة

(٢٤) كرة معدنية مصممة متجانسة نصف قطرها نق . ربطت من نقطة على سطحها في خيط وثبت الطرف الآخر للخيط في النقطة م على حائط رأسي خشن لتركز الكرة في حالة التوازن وهي على وشك الانزلاق إلى أسفل الحائط عند نقطة ب . فإذا كان $m = 3V$ نق وكان معامل الاحتكاك بين الكرة والحائط $\frac{1}{3V}$. فاثبت أن ظل الزاوية التي يصنعها الخيط مع الحائط يساوي $\frac{3V}{4}$ مع العلم بأن خط عمل وزن الكرة يؤثر في مركزها .

الحل

نفرض أن وزن الكرة (و) والخيط يصنع زاوية قياسها (هـ) مع الرأس

من التوازن : $m r = \text{شـ جـ ا هـ}$ (١) ، $\text{شـ جـ ا هـ} + m r = m r = \text{و}$ (٢)

$$\text{جـ ا} = \text{صفر} \quad m r \times 3V \text{ نق} - \text{و} \times \text{نق} = 0$$

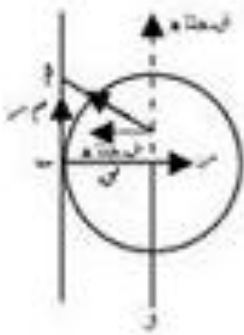
$$\frac{w}{3V} = m r$$

$$\text{من (١) شـ جـ ا هـ} = \frac{w}{3V} \quad (٣)$$

$$\text{من (٢) } \therefore \text{شـ جـ ا هـ} = \frac{w}{3V} \times \frac{1}{3V} + m r = \text{و}$$

$$\therefore \text{شـ جـ ا هـ} = \frac{r}{3} \quad \text{و} \quad (٤)$$

$$\text{بقسمة (٣) على (٤) } \therefore \frac{3V}{r} = \text{هـ} \quad \text{فـ ا هـ} = \frac{3V}{r}$$



(٢٥) جسم وزنه ٥ نيوتن موضوع على مستوى مائل خشن يصنع مع الأفقي زاوية قياسها (ي) وقد وجد أنه إذا أثرت

على الجسم قوة قدرها ٣ نيوتن إلى أعلى موازيه لخط أكبر ميل فإنه يكون على وشك الحركة لأعلى المستوى .

وإذا أثرت عليه قوة قدرها ٢ نيوتن إلى أعلى موازيه لخط أكبر ميل يكون الجسم على وشك الانزلاق أوجد :

أولاً : نـ (ي) ثانياً : معامل الاحتكاك

الحل

عندما يكون الجسم على وشك الحركة لأعلى :

$$m r = 5 \text{ جـ ا ي} , \quad n = m r + 5 \text{ جـ ا ي}$$

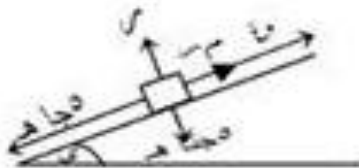
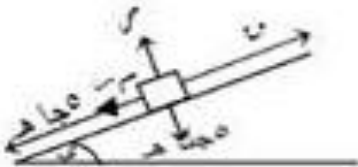
$$\text{ومنها } 3 = 5 \text{ جـ ا ي} + m r \text{ جـ ا ي} \quad (١)$$

وعندما يكون الجسم على وشك الانزلاق :

$$m r = 5 \text{ جـ ا ي} , \quad n = m r + 2 \text{ جـ ا ي}$$

$$\text{ومنها } 2 = 5 \text{ جـ ا ي} + m r \text{ جـ ا ي} \quad (٢)$$

$$\text{من (١) و (٢) } n = 30 \text{ جـ ا ي} , \quad \frac{3V}{10} = m$$



(٢٦) م قضيب غير منظم طوله متر يتزن من منتصفه إذا علق ثقل قدره ٣٠٠ ث جم من نقطة ح التي تبعد عن م بمقدار ٢٠ سم وثقل قدره ٤٠٠ ث جم من نقطة و التي تبعد عن م بمقدار ١٥ سم . وإذا زدنا الثقل عند و حتى أصبح ٨٨٠ ث جم فإن القضيب يتزن من نقطة تبعد عن م بمقدار ٤٠ سم . أوجد موضع تأثير ثقل القضيب وكذلك مقدار وزنه .

الحل

$$\text{ج م} = ٣٠ \times ٣٠٠ - ٤٠ \times ١٥ + ٤٠٠ \times ٢٥ = ٥٠٠٠$$

$$\therefore ٥٠٠٠ = \text{س} \times \text{و} \quad (١)$$

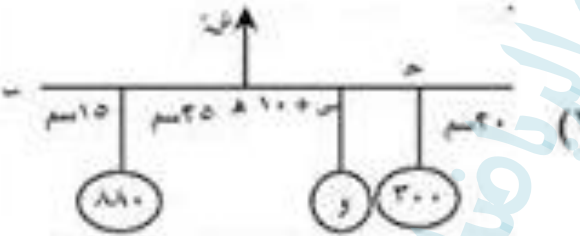
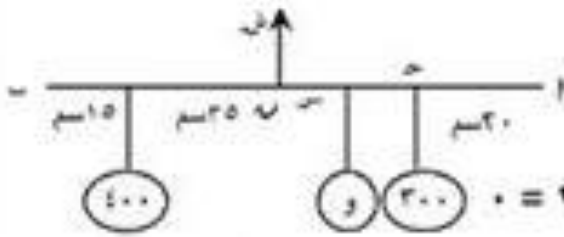
$$\text{ج و} = ٠$$

$$\therefore ٠ = ٢٥ \times ٨٨٠ + (١٠ + \text{س}) \times ٤٠ - ٤٠ \times ٣٠٠$$

$$\therefore ١٠٠٠٠ = (١٠ + \text{س}) \times ٤٠ \quad (٢)$$

$$\text{من (١) ، (٢) } ١٠ = \text{س}$$

أي أن وزن القضيب يبعد عن م مسافة ٤٠ سم من (١) و ٥٠٠ ث جم



(٢٧) م ح د مستطيل فيه م ب = ٩ سم ، ب ح د = ٢٤ سم ، ه ، و منتصفا ب ح ، د على الترتيب . أثرت قوى مقاديرها ٢٧ ، ٣٦ ، ٤٥ نيوتن في م ، ب ، ه ، د على الترتيب . أوجد القوتين اللتين تؤثران في ه و ح حتى تتزن المجموعة .

الحل

$$\text{القوى المؤثرة في أضلاع } \Delta \text{ م ب د : } ٣ = \frac{٣٦}{١٢} = \frac{٢٧}{٩} = \frac{٤٥}{٢٠}$$

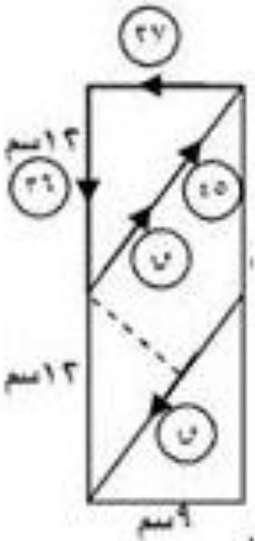
أي أن القوى تتناسب مع الأضلاع ، \therefore القوى في اتجاه دوري واحد \therefore المجموعة تكافئ إزدواج عزمه

$$= ٣٢٤ \text{ نيوتن.سم} = ١٢ \times ٩ \times \frac{١}{٢} \times ٢ \times ٢$$

$$\therefore (٧ ، ٧) \text{ يكونان إزدواج عزمه} = ٣٢٤ \text{ نيوتن.سم}$$

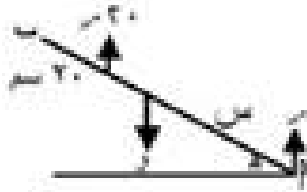
$$\therefore ١٢ \times ٧ \text{ جا ه ح س} = ٣٢٤$$

$$\therefore ٧ = ٧ = ٣٢٤ = \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٧ \text{ نيوتن}$$



(٢٨) م قضيب طوله ٢٠ سم يتزن إذا ارتكز طرفه م على سطح الأرض وارتفع طرفه س عنها بتأثير قوة مقدارها ٧٢٠ ث جم تؤثر رأسيا إلى أعلى في نقطة تبعد عن س بمقدار ٢٠ سم ، ويتزن أيضا إذا ارتكز الطرف س على الأرض وارتفع الطرف م عنها بتأثير قوة مقدارها ٨٤٠ ث جم تؤثر رأسيا إلى أعلى في نقطة م . أوجد ثقل القضيب وعين بعد نقطة تأثيره عن م .

الحل



$$\text{ج م} = ٠ \text{ ، } \therefore \text{و} \times \text{س} \text{ حثا هـ} = ١٠٠ \times ٧٢٠ \text{ حثا هـ} = ٠$$

$$\therefore \text{و} \times \text{س} = ١٠٠ \times ٧٢٠ \quad (١)$$

$$\text{ج س} = ٠ \text{ ، } \therefore \text{و} \times \text{م} = ٣٠ \times ٨٤٠$$

$$\text{و} \times (١٢٠ - \text{س}) = ١٢٠ \times ٨٤٠ \text{ حثا ي} = ٠$$

$$\therefore \text{و} \times (١٢٠ - \text{س}) = ١٢٠ \times ٨٤٠ \quad (٢)$$

$$\text{من (١) ، (٢) : } \therefore \text{س} = ٥٠ \text{ سم} \quad \text{من (١) و } = ١٤٤٠ \text{ ث جم}$$



(٢٩) ن من القوى المستوية المتوازنة المتساوية مقدار كل منها = ن . تؤثر في اتجاه يوازي المحور الصادي وهي بالتتالي متضادة الاتجاه وتؤثر أولها في الاتجاه الموجب للمحور الصادي وعلى بعد منه = ٢ سم وكان البعد بين كل قوة والتالية لها = ٢ سم . فإذا كانت ن عددا فرديا فأثبت أن المجموع الجبري لعزوم هذه القوى حول نقطة الأصل يساوي (ن + ١) × ن .

الحل

ن فرديا فإن عند القوى في الاتجاه الموجب لمحور

$$\text{الصادات} = \frac{١ + \text{ن}}{٢}$$

$$\text{، عند القوى في الاتجاه المضاد} = \frac{١ - \text{ن}}{٢}$$

$$\text{ج م} = (٢ \times \text{ن} + ٦ \times \text{ن} + ١٠ \times \text{ن} + \dots \text{إلى} \frac{١ + \text{ن}}{٢} \text{ حثا})$$

$$(٤ \times \text{ن} + ٨ \times \text{ن} + ١٢ \times \text{ن} + \dots \text{إلى} \frac{١ - \text{ن}}{٢} \text{ حثا})$$

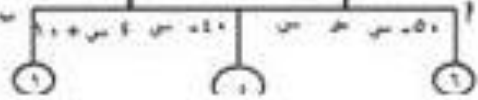
$$= \frac{١ + \text{ن}}{٢} [٢ \times ٢ + ٢ \times ٤ + \dots + ٢ \times (١ - \frac{١ + \text{ن}}{٢})]$$

$$\text{ن} \times (١ + \text{ن}) = \frac{١ - \text{ن}}{٢} [٢ \times ٢ + ٢ \times ٤ + \dots + ٢ \times (١ - \frac{١ - \text{ن}}{٢})]$$

(٣٠) ب قضيب منتظم طوله متراً يرتكز في وضع أفقى على حاملين ح، د، البعد بينهما ٤٠ سم (ح أقرب إلى ب) وإذا علق من ب ثقل قدره ٦ ث كجم فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول ح، وإذا علق من ب ثقل قدره واحد ث كجم لأصبح القضيب على وشك الدوران حول د. أوجد وزن القضيب وبعد كل من الحاملين عن منتصف القضيب.

الحل

عند وضع الثقل ٦ ث كجم من ب يكون القضيب على وشك الدوران حول ح

$$\therefore م = صفر ، ٦ (٥٠ - م) = و \times م (١)$$


وعند وضع الثقل ١ ث كجم من الطرف ب

يكون القضيب على وشك الدوران حول د

$$\therefore م = ١٠٠ ، ١ (١٠ + م) = و (٤٠ - م)$$

من (١)، (٢) م = ٣٠ سم، و = ٨٠ سم مرفوض \therefore عند م = ٣٠ سم

من (١) و = ٤ ث كجم بعد المنتصف عن الوترين = ٣٠ ، ١٠ سم

(٣١) ترتكز احدى نهايتى سلم منتظم على حائط رأسى أملس وترتكز النهاية الأخرى ب على أرض خشنة تميل على الأفقى بزاوية قياسها ه فإذا كان السلم على وشك الانزلاق فثبت أنه يميل على الرأسى بزاوية ظلها ٢ ظا (ه - ي) حيث ي هي قياس زاوية الاحتكاك.

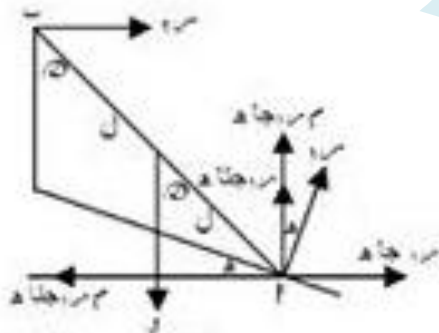
الحل

من التوازن: $م \sin ه + م \cos ه = و$

$$\therefore و = م (\sin ه + \cos ه) (١)$$

$$و \sin ه + م \cos ه = م \sin ه + م \cos ه$$

$$\therefore م \cos ه = م (\sin ه - \cos ه) (٢)$$



$$ج = ٠ ، \therefore و \times ل \sin ه = و \times ل \cos ه$$

$$\therefore \frac{و \sin ه}{و \cos ه} = \frac{ل \sin ه}{ل \cos ه} \quad \text{من (١)، (٢) ظا ه} = \frac{م (\sin ه - \cos ه)}{م (\sin ه + \cos ه)}$$

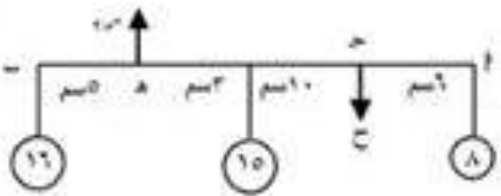
$$\text{بالتعويض عن م = ظا ي = } \frac{ج ي}{جنا ي}$$

$$\therefore \text{ظا ه} = \frac{جنا ي (١ - ي)}{جنا ي (١ + ي)} = \frac{٢ (١ - ي)}{٢ (١ + ي)}$$

(٣٢) ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٦ ، ٤٧ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٥٩ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٦ ، ٦٧ ، ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٣ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٧٦ ، ٧٧ ، ٧٨ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣ ، ٨٤ ، ٨٥ ، ٨٦ ، ٨٧ ، ٨٨ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩١ ، ٩٢ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٧ ، ٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠

١٥ ح = ٣ ح = ١٠ ح = ٦ ح = ٣٠ سم ، أثرت القوى المتوازية والتي مقاديرها ٨ ، ١٥ ، ١٦ ، ن ث جم في النقاط ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٦ ، ٤٧ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٥٩ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٦ ، ٦٧ ، ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٣ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٧٦ ، ٧٧ ، ٧٨ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣ ، ٨٤ ، ٨٥ ، ٨٦ ، ٨٧ ، ٨٨ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩١ ، ٩٢ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٧ ، ٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠

الحل



١٥ ح = ٣ ح = ١٠ ح = ٦ ح = ٣٠ سم ، أثرت القوى المتوازية والتي مقاديرها ٨ ، ١٥ ، ١٦ ، ن ث جم في النقاط ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٦ ، ٤٧ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٥٩ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٦ ، ٦٧ ، ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٣ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٧٦ ، ٧٧ ، ٧٨ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣ ، ٨٤ ، ٨٥ ، ٨٦ ، ٨٧ ، ٨٨ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩١ ، ٩٢ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٧ ، ٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠

المجموع الجبري لعزوم القوى حول ح = عزوم المحصلة حول ح

$$٣٠ \times ٨ = ١٠ \times ١٥ + ٦ \times ٨ - ١٦ \times ٥ = ٣٠ \times ٨$$

$$٨ = ٣٠ - (١٦ + ١٥ + ٨) = ٨$$

(٣٣) جسم مقدار وزنه (و) موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ه وكانت ن أقل قوة تكفى لجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى ، اثبت أن أقل مقدار لقوة موازية للمستوى المائل تؤثر على الجسم وتجعله على وشك الحركة إلى أعلى تساوي ن + م حيث م معامل الاحتكاك .

الحل

$$(١) \quad ٨ = ٣٠ - (١٦ + ١٥ + ٨) = ٨$$

$$٨ = ٣٠ - (١٦ + ١٥ + ٨) = ٨$$

$$(١) \quad ٨ = ٣٠ - (١٦ + ١٥ + ٨) = ٨$$

$$\frac{(٨ + ٣٠)}{(٨ - ٣٠)} = ٨$$

ويكون أقل قوة عندما يكون جتا (ل - ي) أكبر ما يمكن أى جتا (ل - ي) = ١

$$(٢) \quad ٨ = ٣٠ - (١٦ + ١٥ + ٨) = ٨$$

$$٨ = ٣٠ - (١٦ + ١٥ + ٨) = ٨$$

$$\frac{(٨ + ٣٠)}{(٨ - ٣٠)} = ٨$$

$$٨ = ٣٠ - (١٦ + ١٥ + ٨) = ٨$$

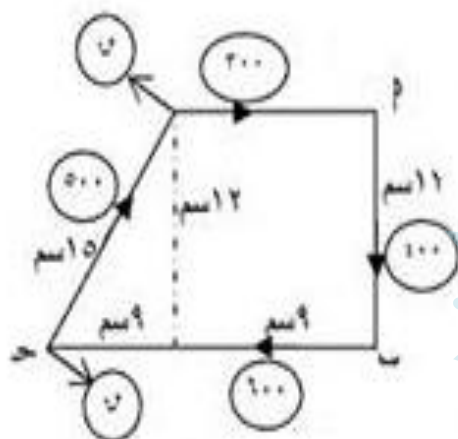
(۳۴)

اثبت ان مجموعة القوى تكافئ ازدواجاً ، وأوجد معيار عزمه وأوجد القوتين اللتين تؤثران عند h ،

والعموديتين على \overline{CD} بحيث تصبح المجموعة في حالة توازن .

الحل

الحل



أي أن القوى تتناسب مع الأضلاع ، : القوى في اتجاه وردي واحد

١٠٤٢ : المجموعة تكافئ أزواج عزمه

$$\text{جم. س. } 18 \times 9 = 12 \times (18 + 9) \times \frac{1}{2} \times \frac{100}{100} =$$

∴ المجموعة تكافئ إزواج المعيار عزمه = ١٠٨٠٠ ث جم.سم

لكي نزن المجموعة (u, v) نكوّن ازدواج عزمه $= 10.800$

$$1000 = 10 \times n \therefore n = 100$$

أُنْتَهَتْ الأُسْـلُةُ

مع كل تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

مع تحيات أسرة توجيه الرياضيات