

# TD Bases de l'optique géométrique

## Données numériques

Indice de réfraction de l'eau :  $n_e = 1,33$ .

Indice de réfraction de l'air :  $n_a = 1,00$ .

## Exercice 1 : Bassin éclairé

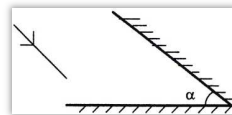
Un bassin de profondeur  $h = 1,00$  m est totalement rempli d'eau. Au fond du bassin est placée une source ponctuelle émettant de la lumière dans toutes les directions. On suppose le bassin suffisamment large pour que ses bords n'interviennent pas ici.

1. Tous les rayons parvenant à la surface de l'eau donnent-ils naissance à un rayon transmis dans l'air ?

2. Montrer que le rayon du disque à travers lequel des rayons lumineux émergent du bassin peut s'écrire  $R = \frac{n_a h}{\sqrt{n_e^2 - n_a^2}}$ .

## Exercice 2 : Miroirs

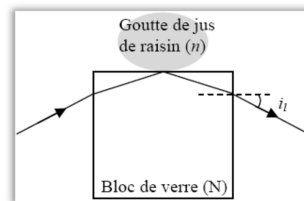
Soient deux miroirs plans faisant entre eux un angle  $\alpha = 42^\circ$ . On considère un rayon incident subissant une réflexion sur chacun des miroirs avant d'émerger du système.



Déterminer la déviation, c'est-à-dire l'angle que font les directions des rayons incident et émergent, en fonction de  $\alpha$ .

## Exercice 3 : Réfractomètre

Les viticulteurs ont besoin de connaître, de façon précise, le taux de sucre présent dans le raisin qu'ils vendangent. L'indice de réfraction du jus de fruit dépend du taux de sucre qu'il contient. Le montage ci-contre illustre le principe du réfractomètre utilisé.



Une goutte de jus de raisin d'indice  $n$  inconnu est déposée sur un bloc transparent d'indice  $N = 1,52$ . L'ensemble est éclairé par un faisceau de lumière parallèle qui tombe sur la face d'entrée du cube sous une incidence ajustable entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

Un viseur permet de détecter la valeur de l'angle  $i_c$  à partir duquel la goutte apparaît particulièrement lumineuse.

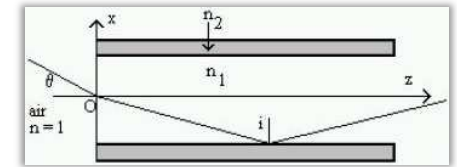
1. Expliquer pourquoi, en dessous de la valeur  $i_c$ , le faisceau traversant le viseur devient plus lumineux.

2. Montrer que  $n = \sqrt{N^2 - n_a^2 \sin^2 i_c}$ .

Donnée :  $i_c = 42,8^\circ$ .

## Exercice 4 : Fibre optique

Une fibre optique, d'axe  $Oz$ , est constituée d'un cœur homogène et transparent d'indice de réfraction  $n_1$ , entouré d'une gaine elle aussi transparente et dont l'indice de réfraction  $n_2$  est inférieur à  $n_1$ .



Données :  $n_1 = 1,50$  et  $n_2 / n_1 = 0,99$ .

1. Montrer que la lumière ne peut se propager dans la fibre optique que si l'angle d'incidence  $i$  est supérieur à un angle limite  $i_0$  à déterminer en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ .

2. La face d'entrée de la fibre est une surface plane normale à  $Oz$ . L'angle d'incidence d'un rayon est noté  $\theta$ . Déterminer l'angle d'acceptance  $\theta_0$  correspondant à  $i_0$  en fonction de  $n_1$ ,  $n_2$  et de l'indice  $n_a$  de l'air.

Les rayons lumineux d'inclinaisons différentes n'ont pas le même chemin à parcourir dans la fibre, donc leur temps de parcours est variable. Une impulsion lumineuse de courte durée envoyée dans la fibre subit un élargissement temporel lorsqu'elle ressortira de celle-ci.

Ceci limite rapidement le taux maximal de transfert d'informations à grande distance par ce type de fibre.

3. Calculer la différence de temps mis par deux rayons lumineux se propageant dans une fibre optique de longueur  $L$ , l'un sur l'axe de la fibre et l'autre incliné de  $\alpha$  par rapport à celui-ci.

4. Quel nombre d'informations peut transférer une telle fibre par unité de temps ?

A.N. :  $L = 1$  m, 100 m, 10 km

## Exercice 5 : Système catadioptrique

1. On considère un rayon incident, de vecteur directeur  $\vec{u}(a, b, c)$ , sur un miroir plan orthogonal à l'axe  $Oz$ .

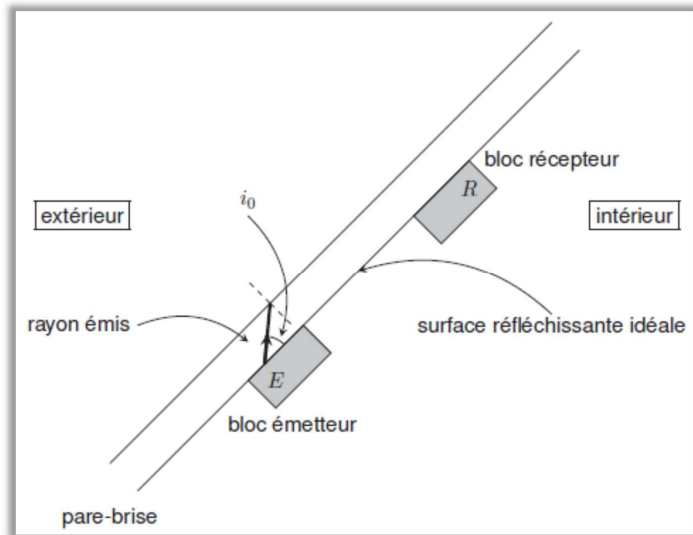
Déterminer le vecteur directeur  $\vec{u}_1$  du rayon réfléchi.

2. Les coins rétroreflecteurs sont des systèmes optiques en forme de coin de cube.

Montrer que tout rayon incident qui se réfléchit sur les trois faces émerge parallèlement à sa direction incidente. Connaissez-vous des applications de ce dispositif ?

### Exercice 6 : Détecteur de pluie (d'après CCP 2018)

Certains modèles de voitures sont équipés de détecteurs de pluie. Ceux-ci contiennent un émetteur E d'impulsion lumineuse et un récepteur R.



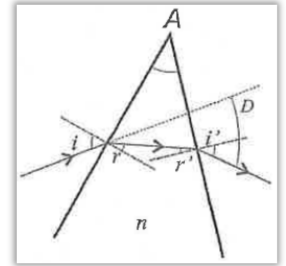
Le récepteur reçoit le signal après quelques réflexions. L'intensité lumineuse reçue dépend du nombre de réflexions et de la géométrie du capteur, mais aussi de la présence ou non d'eau à l'extérieur du pare-brise. L'indice de réfraction du verre du pare-brise est  $n_v = 1,50$ .

1. Exprimer puis calculer les angles d'incidence limites de réflexion totale dans le cas d'une interface verre/air et verre/eau.
2. Justifier le choix d'un angle  $i_0 = 40^\circ$  tel que défini sur le schéma.
3. Expliquer, à l'aide de deux schémas, comment évolue l'intensité lumineuse perçue par le récepteur selon la présence ou l'absence d'eau sur le pare-brise.

4. Le rayon incident est envoyé avec l'angle  $i_0$  défini précédemment. La distance entre l'émetteur et le récepteur (considérés ponctuels) est  $ER = 20 \text{ cm}$ . L'épaisseur du pare-brise est  $e = 3 \text{ mm}$ . Exprimer puis calculer le nombre  $p$  de réflexions sur la face externe du pare-brise. Justifier l'intérêt d'un grand nombre de réflexions.

### Exercice 7 : Prisme

Un prisme, d'angle au sommet  $A$  et d'indice de réfraction  $n$ , est plongé dans l'air d'indice assimilé à l'unité. Il est éclairé par un faisceau polychromatique sous l'angle d'incidence  $i$ . Pour une longueur d'onde dans le vide  $\lambda$  donnée, on note  $r$  l'angle de réfraction sur la face d'entrée,  $r'$  l'angle d'incidence sur la face de sortie,  $i'$  l'angle de réfraction sur la face de sortie et  $D$  l'angle de déviation du faisceau.



1.a. Déterminer la relation entre  $A$ ,  $r$  et  $r'$ .

b. Déterminer la relation entre  $D$ ,  $i$ ,  $i'$  et  $A$ .

2. On constate qu'il existe une valeur limite  $i_\ell(\lambda)$  de l'angle d'incidence  $i$  permettant d'exprimer la condition d'émergence du faisceau sur la face de sortie du prisme. Quelle est cette condition d'émergence ?

3. L'indice du prisme varie en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide selon la relation  $n(\lambda) = n_0 + \frac{C}{\lambda^2}$ , où  $n_0$  et  $C$  sont deux constantes positives indépendantes de  $\lambda$ . Au voisinage d'une longueur d'onde de référence  $\lambda_0$ , l'indice se met sous la forme  $n(\lambda) \simeq n(\lambda_0) - K_n \delta\lambda$ , où  $\delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  avec  $|\delta\lambda| \ll \lambda_0$ . Exprimer  $K_n$ .

4. En désignant par  $r_0$  la valeur de  $r$  à la longueur d'onde  $\lambda_0$ , on peut écrire, au voisinage de  $\lambda_0$ ,  $r \simeq r_0 + K_r \delta\lambda$ . Exprimer  $K_r$  en fonction de  $K_n$ ,  $r_0$  et  $n(\lambda_0)$ . On négligera les termes en  $(\delta\lambda)^2$  devant les termes en  $\delta\lambda$ .

Donnée : si  $|\varepsilon| \ll 1$ , alors  $\cos \varepsilon \simeq 1$  et  $\sin \varepsilon \simeq \varepsilon$ .

5. En désignant par  $D_0$  la valeur de  $D$  à la longueur d'onde  $\lambda_0$ , on peut écrire, au voisinage de  $\lambda_0$ ,  $D \simeq D_0 - K_D \delta\lambda$ . On note  $i'_0$  et  $r'_0$  les valeurs prises par  $i'$  et  $r'$  en  $\lambda_0$ .

Exprimer  $K_D$  en fonction de  $K_n$ ,  $r'_0$ ,  $i'_0$  et  $r_0$ .

6. Sachant que  $K_D \approx 0,6 K_n$  pour des angles exprimés en degrés, et pour  $\lambda_0 = 0,5 \mu\text{m}$  et  $C \approx 10^{-14} \text{ m}^2$ , évaluer l'ordre de grandeur de  $K_D$ .

### Exercice 8 : Loi de Cauchy

La formule de Cauchy, donnant l'indice d'un verre pour une radiation monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide, est  $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$ , où  $A$  et  $B$  sont des constantes.

1. Donner les dimensions de  $A$  et  $B$ , et leurs unités dans le Système international.

2. Des mesures effectuées avec un même verre ont donné :

➤  $n_r = 1,618$  pour une radiation rouge de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_{0r} = 768 \text{ nm}$  ;

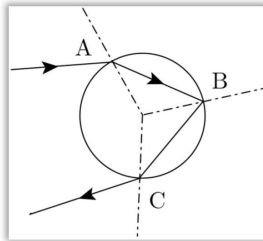
➤  $n_v = 1,652$  pour une radiation violette de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_{0v} = 434 \text{ nm}$ .

a. Calculer les valeurs de  $A$  et  $B$ .

b. En déduire la valeur de l'indice pour une radiation jaune telle que  $\lambda_{0j} = 589 \text{ nm}$ .

### Exercice 9 : Arc-en-ciel

Le phénomène de l'arc-en-ciel est dû au caractère dispersif des gouttes d'eau en suspension dans l'air, qui ne dévient pas toutes les « couleurs » de la même manière. On considère une goutte d'eau, supposée sphérique. Un rayon arrive sur la goutte, subit une première réfraction en A, puis une réflexion en B, avant de sortir de la goutte en subissant une dernière réfraction en C. On note  $i$  et  $r$  les angles respectivement d'incidence et de réfraction au point A.



1. Expliquer pourquoi la réflexion en B ne peut pas être totale.

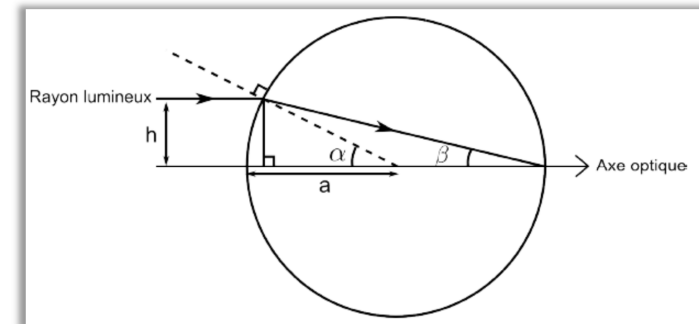
2. En additionnant les déviations angulaires subies, déterminer l'expression de la déviation totale  $D$  du rayon en fonction de  $i$  et  $r$ .

3. En déduire l'expression de la déviation  $D$  en fonction de  $i$ . À l'aide de la calculatrice, tracer l'allure de la courbe  $D(i)$  pour  $0^\circ < i < 90^\circ$ .

4. Pour quelle valeur d'angle d'incidence  $i_m$  la déviation  $D$  est-elle minimale ? Que vaut le minimum de déviation  $D_m$  ?

### Exercice 10 : Modélisation d'un œil (d'après G2E 2019)

Dans une modélisation très simplifiée, on considère que l'œil est une sphère de rayon  $a$ , et d'indice  $n$ . Un rayon lumineux incident arrive sur l'œil, parallèlement à l'axe optique, avec une hauteur  $h$  petite devant  $a$ . Pour que la vision soit correcte, le rayon réfracté associé doit atteindre la rétine en son centre. On se place dans l'approximation aux petits angles, ce qui revient à supposer  $h \ll a$ .



1. Donner une relation entre  $h$ ,  $a$  et  $\sin \alpha$ , et simplifier aux petits angles. De même, relier  $h$ ,  $a$  et  $\beta$ .

2. Reproduire le schéma ci-dessus, et y indiquer l'angle d'incidence  $i$  et l'angle de réfraction  $r$ . Relier  $i$  et  $r$  à  $\alpha$  et  $\beta$ .

3. Écrire la loi de Descartes et la simplifier aux petits angles ; en déduire la valeur de l'indice  $n$  de l'œil dans ce modèle.

4. L'indice des humeurs aqueuse et vitrée est en fait plus faible, proche de celui de l'eau. Commenter en considérant l'effet du cristallin, qui n'a pas été pris en compte.

### Exercice 11 : Propagation du chant du rorqual commun (d'après Agro-Véto 2020)

Le rorqual commun (*Balaenoptera physalus*) est un cétacé à fanons d'une longueur moyenne de 20 m et d'une masse moyenne d'environ 50 tonnes. Les rorquals communs communiquent par des sons puissants à basse fréquence. Cet exercice a pour objectif d'étudier la propagation de ces sons dans l'océan.

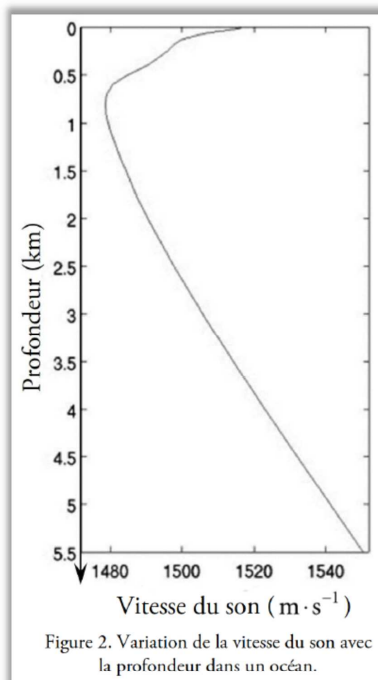


1. Relier l'indice optique d'un milieu et la vitesse de propagation de la lumière dans ce milieu. Rappeler les lois de Descartes de la réfraction et tracer la marche d'un rayon d'incidence  $i_1$  se réfractant d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent.

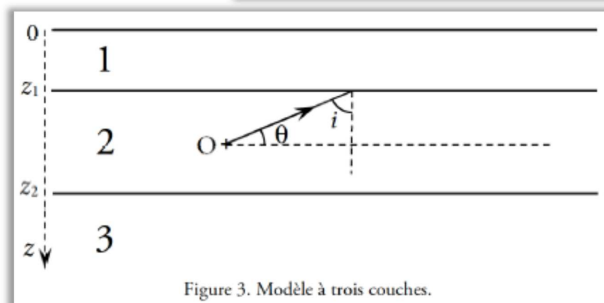
2. Donner la définition d'un dioptre en optique. Dans la suite de l'exercice, un dioptre acoustique sera traité de la même façon qu'un dioptre en optique. Par analogie avec l'optique, définir un indice de réfraction à partir de la vitesse du son dans le milieu et d'une vitesse de référence  $c_0$ .

3. Soient deux couches d'eau de mer à l'intérieur d'un océan, séparées par un dioptre acoustique horizontal. La vitesse du son est différente dans les deux couches. On notera  $c_1$  la vitesse du son dans la couche supérieure et  $c_2$  la vitesse du son dans la couche inférieure. On traitera ce dioptre comme un dioptre en optique. Une onde sonore arrive sur l'interface avec un angle d'incidence  $i_2$  (par rapport à la normale au dioptre) depuis la couche inférieure. En supposant  $c_2 < c_1$ , établir à quelle condition sur  $i_2$  il y a réflexion totale à l'interface.

Dans un océan, à l'exception des océans polaires, la vitesse du son dans l'eau passe par une valeur minimale pour une profondeur  $z_m$  comprise généralement entre 500 m et 1000 m (figure 2).



On modélise cette situation par un modèle très simple à trois couches : une couche supérieure notée 1 entre la surface et une profondeur  $z_1$ , une couche intermédiaire 2 entre les profondeurs  $z_1$  et  $z_2$ , et une couche inférieure 3 en dessous de  $z_2$ .



La vitesse du son est  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  dans les couches 1, 2 et 3 respectivement. On suppose  $c_3 = c_1$  et  $c_2 < c_1$ . Les deux interfaces entre les couches seront traitées par analogie avec les dioptres optiques.

4. Une source en un point O de la couche intermédiaire émet une onde sonore dans une direction faisant un angle  $\theta$  (compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ ) avec l'horizontale. Expliquer pourquoi l'onde sonore émise en O reste confinée dans la couche intermédiaire pour certaines valeurs de l'angle  $\theta$ . Déterminer l'intervalle des valeurs de  $\theta$  pour que ce soit le cas. Calculer numériquement les valeurs limites de cet intervalle. Tracer la marche d'un rayon illustrant ce confinement.

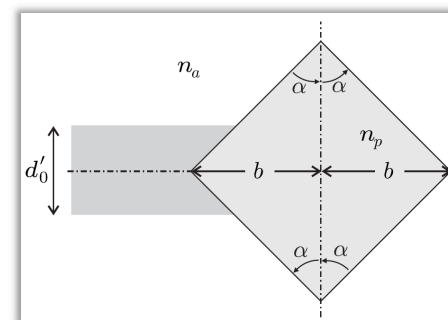
**Données :**  $c_1 = c_3 = 1,51 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $c_2 = 1,48 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Exercice 12 : Diviseur de faisceau (d'après Mines-Ponts PSI 2021)

Un diviseur de faisceau sépare un faisceau cylindrique laser de largeur  $d'_0$  en deux faisceaux parallèles de largeurs identiques  $d''_0$  qui ne se recouvrent pas et qui sont distants de  $D$ .

Le prisme diviseur de faisceau est en verre d'indice  $n_p$ , et ses caractéristiques géométriques sont précisées sur le schéma. On note  $2b$  la largeur du prisme et on prendra

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$



1. Reproduire le schéma et le compléter afin d'expliquer son fonctionnement : on y indiquera  $d'_0$ ,  $d''_0$  et  $D$ . En justifiant rapidement la réponse, donner la valeur de  $d''_0$ .

2. À la limite de non recouvrement des faisceaux, déterminer la relation entre  $b$ ,  $d'_0$  et  $n_p$  sous la forme  $b = \frac{d'_0}{2} \left[ \frac{g(n_p)}{g(n_p) - n_a} \right]$  où  $g$  est une fonction de  $n_p$  que l'on explicitera, sans fonction trigonométrique. En déduire une condition sur  $b$  pour que les faisceaux soient effectivement séparés.

## Éléments de réponses

**1 :** 2.  $R = 1,14 \text{ m}$ .

**2 :**  $D = 2\alpha = 84^\circ$ .

**3 :** 2.  $n = 1,36$ .

**4 :** 1.  $i_0 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 82^\circ$ . 2.  $\theta_0 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_a}\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}\right) = 12^\circ$ .

3.  $\Delta t = \frac{n_1 L}{c} \left( \frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$ .

4.  $N = \frac{c}{n_1 L \left( \frac{n_1}{n_2} - 1 \right)} = \begin{cases} 2,0 \times 10^{10} \text{ informations/s pour } L = 1,0 \text{ m} \\ 2,0 \times 10^8 \text{ informations/s pour } L = 100 \text{ m} \\ 2,0 \times 10^6 \text{ informations/s pour } L = 10 \text{ km} \end{cases}$

**5 :** 1.  $\vec{u}_1(a, b, -c)$ .

**6 :** 1.  $i_\ell = \arcsin\left(\frac{n}{n_v}\right)$ . 2.  $p = \frac{L \tan i_0}{2e} = 28$ .

**7 :** 1.a.  $A = r + r'$ . b.  $D = i + i' - A$ . 2.  $i \geq i_\ell = \arcsin[n \sin(A - \arcsin(1/n))]$ .

3.  $K_n = \frac{2C}{\lambda_0^3}$ . 4.  $K_r \simeq \frac{K_n \tan r_0}{n(\lambda_0)}$ . 5.  $K_D = \frac{\sin r'_0 + \cos r'_0 \tan r_0}{\cos i'_0} K_n$ .

6.  $K_D \approx 0,12 \frac{C}{\lambda_0^3} \approx 10^5 \text{ }^\circ/\text{m}$ .

**8 :** 1.  $[A] = 1$  ;  $[B] = \text{L}^2$ . 2.  $B = \frac{n_v - n_r}{\lambda_{0r}^2 - \lambda_{0v}^2} \lambda_{0v}^2 \lambda_{0r}^2 = 9,4 \times 10^{-15} \text{ m}^2$  ;

$A = n_v - \frac{B}{\lambda_{0v}^2} = 1,602$ . 3.  $n_j = A + \frac{B}{\lambda_{0j}^2} = 1,629$ .

**9 :** 2.  $D = \pi + 2i - 4r$ . 3.  $D = \pi + 2i - 4 \arcsin\left(\frac{n_a}{n_e} \sin i\right)$ . 4.  $i_m = 60^\circ$  ;  $D_m = 137^\circ$ .

**10 :** 1.  $\sin \alpha = \frac{h}{a}$  ;  $\alpha = \frac{h}{a}$  ;  $\beta = \frac{h}{2a}$ . 2.  $i = \alpha$  ;  $r = \beta$ . 3.  $n = 2n_a = 2,00$ .

**11 :** 1.  $n = \frac{c}{v}$ . 2.  $n_s = \frac{c_0}{v_s}$ . 3.  $i_2 > \arcsin\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$ . 4.  $\theta < \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{c_2}{c_1}\right) = 0,20 \text{ rad}$ .

**12 :** 1.  $d_0'' = d_0' / 2$ . 2.  $b = \frac{d_0'}{2} \left( \frac{\sqrt{2n_p^2 - n_a^2}}{\sqrt{2n_p^2 - n_a^2 - n_a^2}} \right)$ .