

**Examen de**  
**TOPOLOGIE**

21 Janvier 2024

Durée : 1H30

**Exercice N°1** (06 points)

On considère l'ensemble  $\mathbb{X} = \{a, b, c, d, e\}$  et  $\tau = \{\emptyset, \mathbb{X}, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$  une topologie sur  $\mathbb{X}$ .

- (1) Soit  $\mathbf{A} = \{a, c, e\}$ , trouver la topologie induite  $\tau_{\mathbf{A}}$ . (01point)
- (2) Trouver un ouvert du sous-espace  $\mathbf{A}$  qui n'est pas ouvert pour  $\mathbb{X}$ . (01point)
- (3) Déterminer les voisinages de  $e$  dans  $\mathbb{X}$  et dans  $\mathbf{A}$ . (02point)
- (4) Soit  $B = \{c, e\}$ , déterminer l'adhérence, l'intérieur, l'ensemble dérivé et la frontière de  $B$ . (02points)

**Exercice N°2** (05 points)

Soit  $\mathbb{X} = [0, +\infty[$ . Pour  $x, y \in \mathbb{X}$ , on note :  $d(x, y) = \min_{x, y \in [0, +\infty[} \left\{ \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}, |x - y| \right\}$ .

- (1) Démontrer que  $d$  est une distance sur  $\mathbb{X}$ . (02points)
- (2) Déterminer la boule  $B(a, b)$  de centre  $a \in \mathbb{X}$  et de rayon  $b$  pour cette distance. (02points)
- (3) La partie  $A = ]0, 1]$  est-elle bornée pour cette distance ? (01point)

**Exercice N°3** (06 points)

Choisissez la bonne réponse (justifiez votre réponse).

- (1) Tout espace métrique peut être vu comme espace topologique.  
 a. vrai                      b. faux (01point)
- (2) Sur un ensemble non-vide arbitraire on peut toujours définir une topologie.  
 a. vrai                      b. faux (01point)
- (3) Dans un espace topologique, il existe toujours une partie qui est ouverte et fermée.  
 a. vrai                      b. faux (01point)
- (4) Dans un espace topologique, une intersection quelconque des ouvertes est toujours une ouverte.  
 a. vrai                      b. faux (02point)
- (5)  $(X, d)$  un espace métrique et  $A$  une partie non vide de  $X$ . Si  $d(x, A) = 0$ , alors  $x$  appartient à  $A$ .  
 a. oui                      b. non (01point)

**Exercice N°4** (1.5 points)

Soit  $(\mathbb{X}, \tau)$  un espace topologique séparé, et soit  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente qui converge vers  $x$ . L'ensemble  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$  est-il compact ?

**Exercice N°5** (1.5 points)

On considère le plan  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance euclidienne  $d_2$ . Démontrer que  $\overline{A} \neq A$ , où  $A = \left\{ \left( \frac{1}{n}, 0 \right) ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

**Solution d'exercice N°1** (06 points)

- (1) La topologie induite  $\tau_A$  sur  $\mathbb{X}$  est :  
 $\tau_A = \{\mathcal{O} \cap A \mid \mathcal{O} \in \tau\} = \{\emptyset, A, \{a\}, \{a, c\}, \{a, e\}\}$ .  
 (01 point)
- (2) Les ensembles  $A$ ,  $\{a, c\}$ , et  $\{a, e\}$  sont des ouverts de  $A$  qui ne sont pas ouverts dans  $\mathbb{X}$ . (01 point)
- (3) Un ensemble  $V$  est un voisinage de  $e$  s'il existe un ensemble ouvert  $\mathcal{O}$  tel que  $e \in \mathcal{O} \subset V$ . (0.5 point)  
 Les voisinage de  $e$  dans  $A$  sont :  
 $\mathcal{V}_A(e) = \{\{a, e\}, A\}$ . (0.5 point)  
 Les voisinages de  $e$  dans  $\mathbb{X}$  sont :  
 $\mathcal{V}_{\mathbb{X}}(e) = \{\{a, b, e\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$ .  
 (01 point)
- (4) Adhérences de  $B$  noté  $\bar{B}$  c'est le plus petit fermé contenant  $B$ . L'ensemble de fermés de  $\mathbb{X}$  est  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{X}, \{b, c, d, e\}, \{c, d, e\}, \{e\}, \{c, d\}\}$ , alors  $\bar{B} = \{c, d, e\}$ . (0.5 point)  
 Intérieurs de  $B$  c'est le plus grand ouvert dans  $B$ , alors  $\overset{\circ}{B} = \emptyset$ . (0.5 point)  
 Dérivés de  $B$  c'est l'ensemble de points d'accumulation.  $x$  est un point d'accumulation si tous les voisinages de  $x$  "sans  $x$ " rencontre  $B$ . Alors  
 $B' = \{d\}$ . (0.5 point)  
 Frontières de  $B$ , noté  $\text{Fr}(B)$  est donnée par  
 $\text{Fr}(B) = \bar{B} \setminus \overset{\circ}{B} = \bar{B} = \{c, d, e\}$ . (0.5 point)

**Solution d'exercice N°2** (05 points)

D'abord  $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ . (0.5 point)

- (1) Puisque la valeur absolue  $|\cdot|$  définit une distance sur  $\mathbb{R}$ , alors  $d$  est une distance sur  $\mathbb{R}$  et donc sur  $[0, +\infty[$  (voir exercice 04 de la série 03, et également le dernier exercice du premier devoir). (1.5 points)
- (2)  $B(a, b) = \{x \in \mathbb{X} : d(a, x) < b\}$ . Si  $d(a, x) < b$  on obtient  $(1-b)|x-a| < b$ .  
 Il reste la discussion selon la valeur de  $b$ . (02 points)
- (3) Le diamètre de  $A$  est donné par  $\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} d(x, y)$ ,  
 dans ce cas  $0 < d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} < |x-y| < 1$  ce qui prouve que  $\delta(A) < +\infty$ .  
 D'où l'ensemble  $A$  est borné. (01 point)

**Solution d'exercice N°3** (06 points)

- (1) Tout espace métrique peut être vu comme espace topologique.  
**a. vrai ✓** **b. faux** (0.5 point)  
 Prenons un espace métrique  $\mathbb{X}$ , il existe toujours une topologie pour laquelle les boules ouvertes forme la brique de base des ensembles ouverts. Autrement dit, tout ensemble ouvert dans cette topologie peut être représenté comme une réunion de boules ouvertes. (0.5 point)
- (2) Sur un ensemble non-vide arbitraire on peut toujours définir une topologie.  
**a. vrai ✓** **b. faux** (0.5 point)  
 Pour un ensemble  $\mathbb{X}$ , la famille  $\{\emptyset, \mathbb{X}\}$  définit une topologie sur  $\mathbb{X}$  c'est la topologie grossière. (0.5 point)

- (3) Dans un espace topologique, il existe toujours une partie qui est ouverte et fermée.

**a. vrai ✓** **b. faux** (0.5 point)

Pour un espace topologique  $\mathbb{X}$ , les ensembles  $\emptyset$  et  $\mathbb{X}$  sont à la fois ouverts et fermés. (0.5 point)

- (4) Dans un espace topologique, une intersection quelconque des ouverts est toujours une ouverte.

**a. vrai** **b. faux ✓** (0.5 point)

Soit  $A_n = ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . C'est clair que les ensembles  $A_n$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}$ , mais l'intersection  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \{0\}$  n'est pas un ouvert. D'une manière équivalente, l'intersection quelconque d'ensemble ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. (1.5 points)

- (5)  $(X, d)$  un espace métrique et  $A$  une partie non vide de  $X$ . Si  $d(x, A) = 0$ , alors  $x$  appartient à  $A$ .

**a. oui** **b. non ✓** (0.5 point)

Soit  $A = ]0, 1[$  et soit  $x = 1$ . C'est clair que  $d(x, A) = 0$  mais  $1 \notin A$ . (0.5 point)

**Solution d'exercice N°4** (1.5 points) Soit  $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  un recouvrement ouvert de  $A$ . Pour chaque  $\lambda$ , il existe  $\mathcal{O}_\lambda \in \tau$  tel que  $\Omega_\lambda = A \cap \mathcal{O}_\lambda$ . En particulier, il existe  $\lambda_0 \in \Lambda$  tel que  $x \in \Omega_{\lambda_0} = \mathcal{O}_{\lambda_0} \cap A$ .

Comme la suite  $\{x_n\}$  converge vers  $x$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $x_n \in \mathcal{O}_{\lambda_0}$  pour tout  $n \geq n_0$ . Cela implique que  $x_n \in \mathcal{O}_{\lambda_0} \cap A = \Omega_{\lambda_0}$  pour tout  $n \geq n_0$ .

En considérant les indices  $k \in \{1, 2, \dots, n_0 - 1\}$ , les ensembles  $\Omega_{\lambda_k}$  forment un ouvert contenant chaque  $x_k$ . Puisque  $(\Omega_\lambda)$  est un recouvrement de  $A$ , on peut choisir  $\Omega_{\lambda_k}$  tel que  $x_k \in \Omega_{\lambda_k}$ . Ainsi, l'ensemble fini  $\{\Omega_{\lambda_0}\} \cup \{\Omega_{\lambda_1}, \Omega_{\lambda_2}, \dots, \Omega_{\lambda_{n_0-1}}\}$  constitue un recouvrement fini de  $A$ .

**Solution d'exercice N°5** (1.5 points) Pour que  $\bar{A} = A$  il faut que  $A$  est fermé. Donc il suffit de démontrer que  $A$  n'est pas fermé. Considérons le sous-ensemble  $A = \{(\frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}^*\}$  dans l'espace métrique  $(\mathbb{R}^2, \mathbf{d}_2)$ , où  $\mathbf{d}_2$  est la métrique euclidienne. Soit  $(\frac{1}{1}, 0), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{3}, 0), \dots$ , une suite de points de  $A$ . La limite de cette suite, lorsque  $n$  tend vers l'infini, est le point  $(0, 0)$ . Cependant,  $(0, 0)$  n'appartient pas à  $A$ , la limite de la suite n'appartient pas à  $A$ . Puisque la limite de la suite n'appartient pas à  $A$ , le sous-ensemble  $A$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}^2$  avec la métrique euclidienne  $\mathbf{d}_2$ .