



MAT0285 - Matemática Discreta

1 TEORIA DOS CONJUNTOS

Definição de Conjunto: um conjunto é uma coleção de zero ou mais objetos distintos, chamados elementos do conjunto, os quais não possuem qualquer ordem associada. Em outras palavras, é uma ***coleção não-ordenada*** de objetos.

Exemplo: $A = \{\text{branco, azul, amarelo}\}$

Em um conjunto, a ordem dos elementos não importa e cada elemento deve ser listado apenas uma vez.

Podemos definir um conjunto de diferentes formas:

Denotação por Extensão: os elementos são listados exhaustivamente.

Exemplo: Vogais = {a, e, i, o, u}

Denotação por Compreensão: definição de um conjunto por propriedades comuns aos objetos. De forma geral, escreve-se $\{x \mid P(x)\}$, onde $P(x)$ representa a propriedade.

Exemplo: Pares = $\{n \mid n \text{ é par}\}$, que representa o conjunto de todos os elementos n , tal que n é um número par.

Ainda podemos especificar um conjunto omitindo alguns elementos que estão implícitos na notação adotada. Veja exemplos:

Dígitos = $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$

Pares = $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$

1.1 Relação de Pertinência

- Se a é elemento de um conjunto A , então podemos escrever:

$$a \in A$$

e dizemos que a pertence ao conjunto A .

- Se a não é elemento de um conjunto A , então podemos escrever:

$$a \notin A$$

e dizemos que a não pertence ao conjunto A .

Exemplo: Considerando o conjunto Vogais = {a, e, i, o, u}, podemos dizer que:

- $e \in \text{Vogais}$
- $m \notin \text{Vogais}$

Considerando o conjunto $B = \{x \mid x \text{ é brasileiro}\}$, temos que:

- $\text{Pelé} \in B$
- $\text{Bill Gates} \notin B$

1.2 Alguns Conjuntos Importantes

O Conjunto Vazio é um conjunto que não possui elementos e pode ser denotado por \emptyset ou $\{ \}$.

Ainda temos:

- \mathbb{N} , que representa o conjunto dos números naturais;
- \mathbb{Z} , que representa o conjunto dos números inteiros;
- \mathbb{Q} , que representa o conjunto dos números racionais;
- \mathbb{I} , que representa o conjunto dos números irracionais;
- \mathbb{R} , que representa o conjunto dos números reais;
- \mathbb{C} , que representa o conjunto dos números complexos.

Definição de Alfabeto: um alfabeto é um conjunto finito, ou seja, um conjunto que pode ser denotado por extensão. Os elementos de uma alfabeto são chamados de símbolos ou caracteres.

Definição de Palavra: uma palavra sobre um alfabeto é uma sequência finita de símbolos do alfabeto, justapostos.

ϵ	palavra vazia
Σ	alfabeto
Σ^*	conjunto de todas as palavras possíveis sobre o alfabeto Σ

Exemplos:

- \emptyset é um alfabeto
- $\{a, b, c, d\}$ é um alfabeto
- \mathbb{N} não é um alfabeto
- ϵ é uma palavra sobre $\{a, b, c\}$
- ϵ é uma palavra sobre \emptyset
- $\emptyset^* = \{\epsilon\}$

Aplicações na Computação

Chamamos de *Linguagem Formal* a um conjunto de palavras sobre um alfabeto. Portanto, podemos entender que uma *linguagem de programação* é o conjunto de todos os seus possíveis programas e que um programa é uma palavra da linguagem de programação.

1.3 Relação de Inclusão

Se todos os elementos de um conjunto A são também elementos de um conjunto B , então dizemos que:

$$A \subseteq B \quad \text{A está contido em B}$$

ou que

$$B \supseteq A \quad \text{B contém A}$$

Neste caso, podemos dizer que A é um *subconjunto de B*.

Por outro lado, se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, ou seja, existe $b \in B$ tal que $b \notin A$, então dizemos que:

$$A \subset B \quad \text{A está contido propriamente em B}$$

ou que

$$B \supset A \quad \text{B contém propriamente A}$$

Neste caso, dizemos que A é um *subconjunto próprio de B*.

Exemplos:

- $\{1, 2, 3\} \subseteq \{3, 2, 1\}$
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$

Definição de Conjunto Universo: denotado por U , é o conjunto que contém todos os conjuntos que estão sendo considerados, ou seja, define o contexto de discussão. Dessa forma, U não é um conjunto fixo e, para qualquer conjunto A , temos que $A \subseteq U$.

1.4 Igualdade de Conjuntos

Dois conjuntos A e B são ditos iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos, ou seja:

$$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A)$$

Exemplos:

- $\{0, 1, 2\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 0 \wedge x < 3\}$
- $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$
- $\{a, b, c\} = \{a, b, b, c, c, c\}$

1.5 Pertinência x Inclusão

Os elementos de um conjunto podem ser conjuntos. Portanto, preste atenção nos conceitos de pertinência e inclusão.

Exemplos: Considere o conjunto $S = \{a, b, c, d, \emptyset, \{0\}, \{1, 2\}\}$. Então:

- $\{a\} \notin S$
- $\{a\} \subseteq S$
- $\emptyset \in S$
- $\emptyset \subseteq S$
- $\{0\} \in S$
- $\{1, 2\} \in S$
- $\{a, b, c, d\} \notin S$
- $\{a, b, c, d\} \subseteq S$